Michael Winkler
Johannes Lankeit

10.12.2019
Abgabe der Hausübungen: 17.12.2019

8. Übungsblatt zur Vorlesung „Angewandte Analysis“ im WS 2019/20

Aufgabe 8.1.
Es seien $R > 0, n \geq 1,\ f \in C^0(\overline{B_R})$ radial und nichtnegativ.
Zeige: Dann hat die Lösung u von (ED) ein (globales) Maximum in 0.

Aufgabe 8.2.
Es seien $R > 0$, $n \geq 1$ sowie $f \in L^1(B_R)$ radial. Zeige, dass die durch

$$u(r) = \int_r^R \frac{1}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \sigma^{n-1} f(\sigma) d\sigma d\rho$$

definierte Funktion außerhalb des Nullpunkts stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 8.3.
Zeige: Für radiales $f \in L^1(B_R)$ definiert

$$u(r) = \int_r^R \frac{1}{\rho^{n-1}} \int_0^\rho \sigma^{n-1} f(\sigma) d\sigma d\rho$$

eine sehr schwache Lösung von (ED).

Aufgabe 8.4.
Für $\varepsilon \in (0,1)$ sei $f_\varepsilon = c_\varepsilon \chi_{B_\varepsilon}$ ein skalares Vielfaches der charakteristischen Funktion von B_ε, wobei c_ε so gewählt sei, dass $\int_{B_1} f_\varepsilon = 1$. Bestimme die Lösungen u_ε von $-\Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon$, $u_\varepsilon|_{\partial B_1} = 0$ sowie punktweise ihren Grenzwert für $\varepsilon \searrow 0$.

Aufgabe 8.5.
Die Funktion u sei eine sehr schwache Lösung von $-\Delta u = |x|^\alpha$, $u|_{\partial B_R} = 0$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist u stetig?

Aufgabe 8.6.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Die Funktion $u \in L^2(\Omega)$ erfülle

$$\int_\Omega u\varphi = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.
Zeige[1], dass dann bereits $u = 0$.[2]
Genügt es für eine radiale Funktion u auch, die Identität für alle radialen φ zu fordern?

Aufgabe 8.7.
Es sei $f \in L^1(B_R)$ radial. Zeige: $-\Delta u = f$, $u|_{\partial B_R} = 0$ hat höchstens eine sehr schwache Lösung.

Aufgabe 8.8.
Gegeben sei die radiale Funktion $f \in L^\infty(B_R)$ und u sei eine sehr schwache Lösung von $-\Delta u = f$, $u|_{\partial B_R} = 0$. Bestimme $\int_{B_R} u$.

Aufgabe 8.9.
Es sei $\phi \in C_0^\infty(B_1)$ (und $\phi(x) = 0$ für $|x| > 1$) mit $\phi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$.
a) Gib ein Beispiel für eine solche Funktion an, die zudem radial und monoton bezüglich r ist.
Wir definieren nun für $\varepsilon > 0$ durch

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

weitere Funktionen. Sei außerdem $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
b) Zeige, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ dann $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y) f(x) dy = f(x)$ gilt.
c) Wir führen folgende Notation ein:

$$(\phi_\varepsilon \star f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y) f(y) dy.$$

Zeige, dass $\|f - \phi_\varepsilon \star f\|_{L^p} \to 0$ für $\varepsilon \searrow 0$.[3]

Aufgabe 8.10.
Mit ϕ_ε wie in 8.9a) sei u_ε die Lösung von $-\Delta u_\varepsilon = \phi_\varepsilon$, $u_\varepsilon|_{\partial B_1} = 0$.
a) Zeige, dass $u_{\varepsilon_1} \geq u_{\varepsilon_2}$, falls $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.
b) Bestimme $u(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} u_\varepsilon(x)$ für jedes $x \in B_1$.
c) Sei $f \in L^p$. Zeige, dass für $\varepsilon \searrow 0$ auch $u_\varepsilon \star f \to u \star f$ in L^p.
d) Bestimme die Grenzfunktion von $-\Delta(u_\varepsilon \star f)$ für $\varepsilon \searrow 0$.
e) Für $f \in C^2(\overline{B_R})$ bestimme $-\Delta(u \star f)$.

[1] Für diese Aussage, das sog. Fundamentallemma der Variationsrechnung, würde auch $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ausreichen.
[2] Tipp: Nutze ein $\psi \in C_0^\infty$ mit $\|u - \psi\|_{L^2} < \varepsilon$ und leite die Abschätzung $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u - \psi\|_{L^2(\Omega)}$ her.
[3] Durch Approximation mit glatten Funktionen kann man zeigen, dass, falls $f \in L^p$, $\sup_{|h|<\eta} \|f(\cdot - h) - f\|_{L^p} \to 0$ für $\eta \to 0$.