Michael Winkler
Johannes Lankeit

17.12.2019
Abgabe der Hausübungen: 7.1.2020

9. Übungsblatt zur Vorlesung „Angewandte Analysis“ im WS 2019/20

Dieses Blatt ist (als Blatt über die Ferien) umfangreicher als die meisten anderen. Deshalb ein paar Vorbemerkungen zur Einordnung: Aufgabe 1 ist wichtig im Zusammenhang mit den aktuellen Vorlesungsthemen und in erster Linie für die Präsenzübung gedacht. Auch Aufgabe 2 bezieht sich auf die aktuellen Themen. Aus Aufgaben 3 und 7 solltest du zumindest die Aussage zur Kenntnis nehmen. Aufgabe 6 ist völlig optional. Teile der Aussagen auf diesem Blatt stammen übrigens aus in den 1980ern und 90ern veröffentlichten Arbeiten.
In den Hausaufgaben lässt sich die doppelte Punktzahl erreichen.

Aufgabe 9.1.
Betrachte Lösungen der Gleichung

$$-\Delta u = u - u^2$$

auf $\mathbb{R}^1$, die $u(0) = a$ sowie $u'(0) = 0$ erfüllen.
a) Zeige, dass für $a \geq 1$ die Lösung u auf $[0, \infty)$ monoton wachsend ist.
Tipp: Für $a > 1$ betrachte $x_0 = \sup\{\overline{x} > 0; u > 1 \text{ auf } [0, \overline{x})\}$.
b) Für $a \in (0, 1)$ weise die Existenz einer Stelle $x_a > 0$ mit $u(x_a) = 0$ nach, sodass u auf $[0, x_a)$ positiv und monoton fallend ist.
Multipliziere dazu die Gleichung mit u', setze $x_a = \sup\{\overline{x} > 0; u' \leq 0 \text{ und } u \geq 0 \text{ auf } [0, \overline{x}]\}$ und zeige, dass für $x \in [0, x_a]$ damit $x = \int_{u(x)/a}^{1} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2-\frac{2}{3}a(1-\sigma^3)}}$ gilt.
c) Zeige, dass die Abbildung $a \mapsto x_a$ aus b) streng monoton wachsend auf $(0, 1)$ ist, und zeige, dass $\lim_{a\searrow 0} x_a = \frac{\pi}{2}$ und $\lim_{a\nearrow 1} x_a = \infty$.
d) Zeige, dass das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u =& u - u^2, \qquad \text{in } \Omega = \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \\ u\left(\pm\frac{L}{2}\right) =& 0 \end{aligned}$$

im Fall $L \leq \pi$ nur die triviale Lösung als nichtnegative Lösung hat und dass für $L > \pi$ zusätzlich genau eine weitere nichtnegative Lösung existiert.
Im Fall $u \not\equiv 0$ betrachte für eine Maximalstelle x_0 von u die durch $\widetilde{u}(x) = u(x - x_0)$ definierte Funktion.

Aufgabe 9.2.
Die Funktion u löse

$$\begin{aligned} &u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + f(u(r)) = 0, \qquad r > 0, \\ &u(0) = a > 0, u'(0) = 0 \end{aligned}$$

mit einem $n \geq 3$ und wir definieren R als ihre kleinste positive Nullstelle. Die Funktion $f \in C^1([0, \infty))$ habe die folgenden Eigenschaften:
(F1) $f(0) = 0$, $f'(u) \leq 0$ auf $(0, \delta_0)$ mit einem positiven δ_0.
(F2) Es gebe $u_0 > 0$ mit $f'(u_0) > 0$ und $f(u)(u - u_0) > 0$ für alle $u \neq u_0$.
(F3) $f(u) \leq f'(u)(u - u_0)$ für alle $u \geq u_0$.
(F5) Es gebe $\overline{u} > 0$ mit $[\frac{2n}{n-2}F(u) - f(u)u](u - \overline{u}) \geq 0$ für alle $u \geq 0$, worin $F(u) = \int_0^u f(s)ds$.
Zeige, dass die durch $\theta(r) = \frac{-ru'(r)}{u(r)}$ definierte Funktion in allen Stellen r mit $u(r) > u_0$ positive Ableitung hat.
Betrachte dazu zunächst $v(r) = ru'(r)$ und zeige $-\Delta v = f'(u)v + 2f(u)$.
Zeige dann, dass

$$r^{n-1}u^2(r)\theta'(r) = \int_0^r t^n(f'(u)uu' - f(u)u')dt + 2\int_0^r t^{n-1}f(u)udt$$

und folgere, dass $\theta'(r)$ dasselbe Vorzeichen hat wie

$$[f(u)u - 2F(u)]r^n + \int_0^r [2nF(u) - (n-2)f(u)u]t^{n-1}dt.$$

(Nimm im Folgenden an, es wäre bereits gezeigt, dass aus $u(r) \geq \overline{u}$ auch $u \geq \overline{u}$ auf $[0, r)$ folge und entsprechend $u(r) \leq \overline{u}$ bereits $u \leq \overline{u}$ auf (r, R) impliziere.) Zeige, dass (F2) und (F3) implizieren, dass $2F(u) \leq uf(u)$, wenn $u > u_0$, und nutze (F5), um den Beweis für den Fall $u(r) > \overline{u}$ abzuschließen.
Falls $u(r) < \overline{u}$, weise nach, dass

$$\int_0^r [2nF(u) - (n-2)f(u)u]t^{n-1}dt \geq \int_0^R [2nF(u) - (n-2)f(u)u]t^{n-1}dt = R^{n-1}(Ru'^2(R)) \geq 0.$$

Tipp zur letzten Gleichheit: Pohozaev.

Aufgabe 9.3.
Eine Lösung $u_{u_0} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des Systems

$$\begin{aligned} u'_{u_0} &= f(u_{u_0}) \\ u_{u_0}(0) &= u_0 \end{aligned}$$

(mit Lipschitz-stetigem $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) heißt periodisch mit Periode T, falls $u_{u_0}(t+T) = u_{u_0}(T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
a) Zeige, dass die Menge $P = \{0\} \cup \{s; s \text{ ist Periode von } u_{u_0}\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{R}$ ist.
b) Beweise: Wenn $\{u_{u_0}(t); t > 0\}$ nicht nur aus einem Gleichgewichtspunkt u_0 besteht, dann liegt P nicht dicht in $\mathbb{R}$.
c) Sei nun das System kooperativ. Es gebe $T > 0$, sodass $u_{u_0}(T) \leq u_0$ (in jeder Komponente). Ferner sei p ein Häufungspunkt von $\{u_{u_0}(kT); k \in \mathbb{N}\}$. Zeige, dass dann $u_{u_0}(T+t) \leq u_{u_0}(t)$ für alle $t > 0$ und $p = \lim_{k\to\infty} u_{u_0}((k+1)T) = \lim_{k\to\infty} u_{u_0}(kT)$ ist, und folgere, dass u_p periodisch mit Periode T ist.
d)Beweise: Wenn zu einer beschränkten Lösung u eines kooperativen Systems ein $T > 0$ existiert, sodass (komponentenweise) $u(T) < u_0$, so besteht $\omega(u)$ aus genau einem Gleichgewichtspunkt.
e) Zeige, dass jede beschränkte Lösung eines zweidimensionalen kooperativen Systems konvergiert.

Aufgabe 9.4.
Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Finde eine Erhaltungsgröße für das System

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= f(u). \end{aligned}$$

Aufgabe 9.5.
Zeige: Alle Lösungen von $x'' = x - x^3$ (versehen mit Anfangswerten bei $t = 0$) existieren global auf $[0, \infty)$.

Aufgabe 9.6.
Es seien $\tau > 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < -|b|$. Für die Gleichung[1]

$$y'(t) = ay(t) + by(t - \tau)$$

wird die durch

$$L[y(t)] = y^2(t) + |b| \int_{t-\tau}^t y^2(s)ds$$

definierte Funktion in einem Buch über mathematische Biologie[2] als „Liapunov function“ bezeichnet. Zeige, dass diese Bezeichnung gerechtfertigt ist.[3] In welcher Hinsicht weicht sie dennoch von unserer Definition ab?

[1] Diese Art von Gleichungen findet man oft unter der Bezeichnung „delay equations“, weil der Wert von y nach einer Verzögerung τ in die Gleichung eingeht. Und auf die Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen (oder auch nur, was man als „Anfangswert“ angeben müsste) gehen wir hier nicht ein.
[2] J.D. Murray: Mathematical Biology I: An introduction
[3] Eventuell hilft die Young'sche Ungleichung in der entsprechenden Rechnung.

Aufgabe 9.7.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Eine Menge $M \subset U$ heißt „(positiv) invariant" für das System $u' = f(u)$, falls für alle Anfangswerte $u_0 \in M$ die zugehörigen Lösungen u_{u_0} von

$$u'_{u_0} = f(u_{u_0}), \qquad u(0) = u_0$$

auch $u_{u_0}(t) \in M$ für alle $t \in [0, T_{max})$ erfüllen.
a) Zeige: Vereinigung und Durchschnitt positiv invarianter Mengen sind positiv invariant.
b) Zeige: Falls M abgeschlossen ist, ist M positiv invariant genau dann, wenn für alle $x \in \partial M$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $u_x(t) \in M$ für alle $t \in [0, \varepsilon)$.
c) Zeige: Zu jeder Menge $M \subset U$ gibt es eine maximale positiv invariante Teilmenge $I(M)$ von M. Ist $A \subset M$ positiv invariant, so ist $A \subset I(M)$.
d) Sei $V \in C^2(U)$ so, dass $\nabla V(x) \neq 0$ für alle $x \in V^{-1}(\{0\})$. Dann[4] ist $M = V^{-1}((-\infty, 0])$ genau dann positiv invariant, wenn $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$ für alle $x \in \partial M = V^{-1}(\{0\})$.
Beweise diesen Satz.
Für eine Richtung des Beweises wähle dabei $x_0 \in \partial M$ und zeige, dass es $\bar{t} > 0$ gibt, sodass $u_{x_0}(t) \in M$ für $t \in (0, \bar{t})$. Dazu wähle eine offene Umgebung U_0 von x_0 so, dass $|\nabla V(x)| > \alpha > 0$ für $x \in U_0$ und nutze, dass die Funktion Ψ, die (u_0, λ, t) auf $u(t)$ für die Lösung u von $u(0) = u_0, u' = g(u, \lambda) = f(u) - \lambda \nabla V(u)$ abbildet, stetig ist[5], um zu zeigen, dass $\bar{t}, \bar{\lambda} > 0$ existieren mit $\Psi(t, x_0, \lambda) \in U_0$ für alle $t \in [0, \bar{t}), \lambda \in [0, \bar{\lambda})$.
Sei dann $\lambda \in (0, \bar{\lambda}]$ und $t_1 \in [0, \bar{t})$ so, dass $x_1 = \Psi(x_0, t_1, \lambda) \in \partial M$. (Zeige und) nutze, dass $\nabla V(x) \cdot g(x, \lambda) \leq \nabla V(x) \cdot f(x) - \lambda \alpha^2$ in U_0, um auf die Existenz einer offenen Umgebung $U_1 = U_1(t_1, x_0, \lambda) \subset U_0$ von x_1 zu schließen, sodass $\nabla V(x) \cdot g(x, \lambda) \leq 0 \ \forall x \in U_1$ und folgere die Existenz von $\varepsilon_1 \in (0, \bar{t} - t_1)$ mit $\Psi(t, x_1, \lambda) \in U_1 \forall t \in [0, \varepsilon_1]$. Zeige, dass damit $V(\Psi(t, x_1, \lambda)) \leq 0$ für $t \in [0, \varepsilon_1]$ und demnach $\Psi(t, x_1, \lambda) \in M$ für $t \in [0, \varepsilon_1]$. Folgere damit aus $\Psi(0, x_0, \lambda)$ die Ex. von $\varepsilon_0 \in (0, \bar{t}]$ mit $\Psi(t, x_0, \lambda) \in M \forall t \in [0, \varepsilon_0]$ und definiere $t_* = \sup \left\{\varepsilon \in (0, \bar{t}] : \Psi(t, x_0, \lambda) \in M \forall t \in [0, \varepsilon]\right\}$. Begründe die Wohldefiniertheit von t_* und, dass $\varepsilon_0 \leq t_* \leq \bar{t}$. Führe die Annahme $t_* < \bar{t}$ mittels der vorhergehenden Überlegungen auf einen Widerspruch. Folgere, dass $\Psi(t, x_0, \lambda) \in M$ für alle $t \in [0, \bar{t}], \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$ und nutze eine frühere Teilaufgabe, um den Beweis zu beenden.

Aufgabe 9.8.
Zeige, dass die Menge $M_c = \left\{(x, y, z) : 28x^2 + 10y^2 + 10(z - 56)^2 \leq c\right\}$ eine positiv invariante Menge für das Lorenz-System $x' = 10y - 10x, y' = 28x - y - xz, z' = xy - \frac{8}{3}z$ ist, falls $c \geq c_0$ (mit einem geeigneten $c_0 \in \mathbb{R}$; welchem?)[6].
Folgere, dass alle Lösungen des Lorenz-Systems global und beschränkt sind.

Aufgabe 9.9.
Betrachte das Ross-Macdonald-Modell für die Ausbreitung von Malaria:

$$x' = \alpha y(1 - x) - rx$$
$$y' = \beta x(1 - y) - \mu y.$$

Darin beschreibt x den infizierten Anteil der menschlichen Bevölkerung, y den der weiblichen Moskitopopulation; α gibt die Rate an, mit der Menschen von Moskitos infiziert werden, β die Rate, mit der sich Moskitos bei Menschen infizieren; $\frac{1}{r}$ beschreibt die durchschnittliche Dauer einer Infektion beim Menschen, $\frac{1}{\mu}$ die Lebenszeit eines Moskitos. Mit N als Bevölkerungszahl der Menschen, m als Größe der Moskitopopulation und a als die Zahl an Stichen infizierter Moskitos, die beim Menschen eine Infektion hervorruft, ist $\alpha = \frac{a\beta M}{N}$.
a) Zeige, dass $[0, 1]^2$ positiv invariant ist. (Warum ist das auch sehr sinnvoll?)
Wir wählen im Folgenden die Anfangswerte $x(0)$ und $y(0)$ aus dieser Menge.
b) Zeige, dass das System kooperativ ist. (Warum ist das auch aus biologischer Sicht „klar"?)
c) Welche Gleichgewichte hat das System in $[0, 1]^2$ in Abhängigkeit von der Malariaausbreitungsrate $R = \frac{M}{N} \frac{\beta^2 \alpha}{\mu r}$?
d) Untersuche das Langzeitverhalten des Systems.
e) Ist es nach diesem Modell erforderlich, alle Moskitos zu töten, um den Malariaerreger auszurotten?

[4] Tatsächlich würde dafür sogar $V \in C^1(U)$ ausreichen; im Beweis müsste man dann C^1-Funktionen durch C^2-Funktionen annähern (sehr technisch).
[5] Nach Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Satz 13.1, den wir auch für Lemma I.2.4.4 genutzt haben.
[6] Tipp: $-z^2 + 56z \leq -\frac{1}{2}(z^2 - 2 \cdot 56z + 56^2) + 1568$.