

1. Übung zur Vorlesung „Differentialgleichungen der mathematischen Biologie“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:

Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig und $y_0 \in \mathbb{R}$.

Zeige: Es gibt $T_{max} \in (0, \infty]$ und $y \in C^1((0, T_{max})) \cap C^0([0, T_{max}))$, sodass

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), & t \in (0, T_{max}), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

und

$$\text{entweder } T_{max} = \infty \quad \text{oder} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = \infty.$$

Darüber hinaus ist die Lösung y des obigen Anfangswertproblems eindeutig bestimmt.

Präsenzaufgabe 2:

Wie viele Lösungen hat

$$y' = 42y, \quad y(0) = y_0,$$

für gegebenes $y_0 \in \mathbb{R}$?

Präsenzaufgabe 3:

Bestimme $T_{max} \in (0, \infty]$ und eine Lösung y von

$$\begin{cases} y'(t) = (y(t))^2, & t \in (0, T_{max}), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

so, dass $T_{max} = \infty$ oder $\limsup_{t \rightarrow T_{max}} |y(t)| = \infty$. Berechne dann $\lim_{t \nearrow T_{max}} y(t)$.
Was ändert sich bei anderen Anfangswerten $y(0)$?

Präsenzaufgabe 4:

Löse für gegebene Zahlen $a, b, y_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = ay + b, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Präsenzaufgabe 5:

a) Es sei y eine (überall von null verschiedene) Lösung von $y' = y - y^2$.

Welche Differentialgleichung erfüllt dann $z := \frac{1}{y}$?

b) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und y eine positive Lösung von $y' = y - y^\alpha$.

Finde $\beta \in \mathbb{R}$ so, dass $z := y^\beta$ eine leicht zu lösende Differentialgleichung erfüllt.

Hausübungen

Abgabe: 20. April 2016, 14:03 Uhr

Wegen §6 (4) Satz 4 der Prüfungsordnung zählen die Hausübungen dieses Blattes noch nicht zum Nachweis qualifizierter Teilnahme gemäß §6 (1) und §6(4), Satz 1 bis 3, der (im Einklang mit §9 (1)) Voraussetzung für die Teilnahme an der Modulabschlussprüfung (Klausur) ist. Für die übrigen Hausübungen gilt: Alle Übungszettel (bis auf zwei) sind abzugeben, insgesamt müssen in den Hausübungen mindestens 20 Punkte erreicht werden.

Hausaufgabe 1:

Es sei $N \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^N$, $y_0 \in \overset{\circ}{D}$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $0 \in I$ sowie $f: I \times D \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine stetige Funktion derart, dass für alle $t \in I$ die Funktion $f(t, \cdot)$ lokal Lipschitz-stetig sei.

Zeige: Dann gibt es $T_{max} > 0$ und $y \in C^1((0, T_{max}); \mathbb{R}^N) \cap C^0([0, T_{max}); \mathbb{R}^N)$ mit

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in (0, T_{max}), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

und

$$\text{entweder } T_{max} = \sup I \quad \text{oder} \quad \limsup_{t \nearrow T_{max}} \|y(t)\|_{\mathbb{R}^N} = \infty. \quad \text{oder} \quad \liminf_{t \nearrow T_{max}} \text{dist}(y(t), \partial D) = 0$$

Zeige weiter: Ist $T \in (0, T_{max}]$ und $z \in C^1((0, T); \mathbb{R}^N) \cap C^0([0, T]; \mathbb{R}^N)$ eine Lösung von

$$z(0) = y_0 \quad \text{und} \quad z'(t) = f(t, z(t)), \quad t \in (0, T),$$

dann gilt $z = y|_{[0, T]}$.

Hausaufgabe 2:

Finde zu jeder Wahl von $a, b, c \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung von

$$\begin{cases} u' = au - bu^3 & \text{auf } (0, T_{max}), \\ u(0) = c, \end{cases}$$

und bestimme

$$\lim_{t \nearrow T_{max}} u(t).$$

Hausaufgabe 3:

Dem in dieser Aufgabe betrachteten Modell zur Organheilung liegt folgende Vorstellung zu Grunde: Ein (tierisches oder menschliches) Organ muss für den Körper eine gewisse Arbeit leisten: Das besorgen seine *Arbeitszellen*, deren Anzahl wir als u bezeichnen. Es muss sich zugleich ständig regenerieren, worum sich seine *Regenerationszellen* (Anzahl: v) kümmern.

a) Eine vereinfachte Form des Modells ist die folgende:

$$\begin{cases} u' = 2\alpha\lambda v - \mu u, \\ v' = (1 - 2\alpha)\lambda v \end{cases}$$

Welche Effekte werden durch die Terme beschrieben und was ist die biologische Bedeutung der Konstanten α, λ, μ ?

b) In dieser verfeinerten Modellvariante seien nun α und λ stetig differenzierbare Funktionen mit $\lambda' < 0 < \alpha'$ und das Modell laute

$$\begin{cases} u' = 2\alpha(u)\lambda(u)v - \mu u, \\ v' = (1 - 2\alpha(u))\lambda(u)v. \end{cases}$$

Welche zusätzlichen Phänomene sind hier berücksichtigt?

Warum könnten diese Mechanismen für einen Organismus vorteilhaft sein?

Was ist die Bedeutung davon, dass α und λ nur von u , nicht aber von v abhängen?

c) Finde (für beide Modelle) alle konstanten Lösungen.