Michael Winkler
Johannes Lankeit

22. Juni 2016

10. Übung zur Vorlesung „Differentialgleichungen der mathematischen Biologie“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
Beweise Lemma 2.2.4: Ist $a > 1$ (bzw. $a < -1$), so ist das maximale (positive) Existenzintervall $[0, x_{max})$ der Lösung von

$$\begin{cases} -w_{xx} = w - w^3 \\ w_x(0) = 0 \\ w(0) = a \end{cases}$$

endlich, und es gelten $w_x > 0$ (bzw. $w_x < 0$) in $(0, x_{max})$ sowie $w(x) \nearrow +\infty$ (bzw. $w(x) \searrow -\infty$) für $x \nearrow x_{max}$.

Präsenzaufgabe 2:
Beweise Cor. 2.2.6.

Hausübungen

Abgabe: 29. Juni 2016, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:

a) Finde für Lösungen des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u - u^2 \\ \partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases}$$

eine ähnliche Aussage wie Lemma 2.2.8. Genauer: Finde ein Funktional E derart, dass

$$\frac{d}{dt} E(u(\cdot, t)) = -\int_\Omega u_t^2.$$

b) Betrachte nun allgemeiner

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u) \\ \partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases}$$

mit einem $f \in C^1(\mathbb{R})$ derart, dass $f_+ \in L^1((0, \infty))$ und $f_- \in L^1((-\infty, 0))$. Zeige, dass

$$t \mapsto \int_\Omega |\nabla u(\cdot, t)|^2, \quad t \in [0, \infty),$$

für jede globale Lösung zu Anfangsdaten $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ beschränkt ist.

Hausaufgabe 2:

Betrachte Lösungen der Gleichung

$$-\Delta u = u - u^2$$

auf $\mathbb{R}^1$, die $u(0) = a$ sowie $u'(0) = 0$ erfüllen.

a) Zeige, dass für $a \geq 1$ die Lösung u monoton wachsend ist.

Tipp: Für $a > 1$ betrachte $x_0 = \sup\{\overline{x} > 0; u > 1 \text{ auf } [0, \overline{x})\}$.

b) Für $a \in (0, 1)$ weise die Existenz einer Stelle $x_a > 0$ mit $u(x_a) = 0$ nach, sodass u auf $[0, x_a)$ positiv und monoton fallend ist.

Multipliziere dazu die Gleichung mit u', setze $x_a = \sup\{\overline{x} > 0; u' \leq 0 \text{und } u \geq 0 \text{ auf } [0, \overline{x}]\}$ und zeige, dass für $x \in [0, x_a]$ damit $x = \int_{u(x)/a}^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2-\frac{2}{3}a(1-\sigma^3)}}$ gilt.

c) Zeige, dass die Abbildung $a \mapsto x_a$ aus b) streng monoton wachsend auf $(0, 1)$ ist und zeige, dass $\lim_{a \searrow 0} x_a = \frac{\pi}{2}$ und $\lim_{a \nearrow 1} x_a = \infty$.

d) Zeige, dass das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u - u^2, \qquad \text{in } \Omega = \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \\ u\left(\pm\frac{L}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

im Fall $L \leq \pi$ nur die triviale Lösung als nichtnegative Lösung hat und dass für $L > \pi$ zusätzlich genau eine weitere nichtnegative Lösung existiert.

Im Fall $u \not\equiv 0$ betrachte für eine Maximalstelle x_0 von u die durch $\widetilde{u}(x) = u(x - x_0)$ definierte Funktion.

e) Ist u die Lösung aus d), so erfüllt $v(x, t) := u(x)$ die Fisher-KPP-Gleichung aus Beispiel 2.1.12, konvergiert aber nicht gegen 1. Warum ist das kein Widerspruch zur Aussage aus 2.1.12?