Michael Winkler
Johannes Lankeit

29. Juni 2016

11. Übung zur Vorlesung „Differentialgleichungen der mathematischen Biologie“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Gebiet und $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ sowie u die zugehörige Lösung von

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \\ \partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

Bestimme $\omega(u_0)$.

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet. Zeige: Damit

$$-\Delta u = f, \quad \partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

erfüllt sein kann, muss $\int_\Omega f = 0$ gelten.

Präsenzaufgabe 3:
Ist $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und $w \in C^2(\overline{\Omega})$ klassische Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta w = f & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu w\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

so erfüllt w auch

$$-\int_\Omega w\Delta\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ mit } \partial_\nu\varphi = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

und

$$\int_\Omega \nabla w \nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Präsenzaufgabe 4:
Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C^0([0,1])$ mit $\|f_n\|_{C^1([0,1])} \le 42$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es eine Folge $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $n_j \to \infty$ und ein $f \in C^0([0,1])$ derart gibt, dass $f_{n_j} \to f$ gleichmäßig für $n \to \infty$.

Präsenzaufgabe 5:
Beweise Lemma 2.2.10: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen und $u \in C^1(\Omega)$ so, dass $u_j \to u$ für $j \to \infty$ im Sinne gleichmäßiger Konvergenz und gibt es $C > 0$ so, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $\int_\Omega |\nabla u_j|^2 \le C$ erfüllt ist, so ist auch $\int_\Omega |\nabla u|^2 \le C$.

Hausübungen

Abgabe: 13. Juli 2016, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:

Beweise Lemma 1.2: Seien $a > 0$, $\beta > 1$ und $c > 0$, und $y \in C^0([0,\infty)) \cap C^1((0,\infty))$ sei nichtnegativ und erfülle

$$y'(t) + ay^\beta(t) \leq c \quad \text{für jedes } t > 0.$$

Dann gilt

$$y(t) \leq \left(\frac{2}{(\beta-1)a}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} t^{-\frac{1}{\beta-1}} + \left(\frac{2c}{a}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{für alle } t > 0.$$

Tipp: Untersuche $\overline{y}(t) := At^{-\frac{1}{\beta-1}} + B$.

Hausaufgabe 2:

Es sei $\Omega = (0, L)$ für ein $L > 0$. Betrachte

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (u^2 - 2u + 2)(2-u)u(u-1) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t), & t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

Zeige, dass alle Lösungen dieses Problems zu nichtnegativen Anfangsdaten $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ konvergent sind (im Sinne gleichmäßiger Konvergenz für $t \to \infty$), und gib alle möglichen Grenzwerte an.