Michael Winkler
Johannes Lankeit

13. Juli 2016

12. Übung zur Vorlesung „Differentialgleichungen der mathematischen Biologie“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
Zeige: Für alle $\alpha \in (0,1)$ und $0 \le \beta < \gamma$ gibt es $c > 0$ so, dass für alle $t > 0$

$$\int_0^t (1+s^{-\alpha})e^{-\beta s}e^{-\gamma(t-s)}\,\mathrm{d}s \le ce^{-\beta t}.$$

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, glattes Gebiet und $f \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ sowie $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$. Zeige, dass

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \nabla\cdot((u-\overline{u}_0)^2 f), \\ \partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(\cdot,0) = u_0, \end{cases}$$

im Falle „kleiner Anfangsdaten“[1] eine globale Lösung hat, die für $t \to \infty$ konvergiert. Hierin sei $\overline{u}_0 = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0$.
Hinweis: Betrachte für geeignete ε, α das Supremum der Menge $\{T > 0; \|u(\cdot,t)-\overline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \le \varepsilon e^{-\alpha t}$ für alle $t \in [0,T]\}$.

Präsenzaufgabe 3:
Es seien $p \in (1,\infty]$ und $p' := \frac{p}{p-1}$ ($:= 1$, falls $p = \infty$). Beweise, dass dann für jedes $\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$ gilt

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} = \sup\left\{\left|\int_\Omega \varphi\psi\right|; \psi \in C^0(\overline{\Omega}), \|\psi\|_{L^{p'}(\Omega)} \le 1\right\}.$$

Hausübungen

Abgabe: 20. Juli 2016, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:
Zeige: Es gilt

$$\int_\Omega e^{t\Delta}\varphi\cdot\psi = \int_\Omega \varphi\cdot e^{t\Delta}\psi \qquad \text{für alle } \varphi,\psi \in C^0(\overline{\Omega}), t > 0.$$

Tipp: Betrachte $y(s) := \int_\Omega e^{s\Delta}\varphi\cdot e^{(t-s)\Delta}\psi, s \in [0,t]$.

Hausaufgabe 2:
Beweise Lemma 1.11, Teil iii) und iv): Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, glatt, konvex und $\lambda_1 > 0$ so, dass $\lambda_1\int_\Omega|\varphi-\overline{\varphi}|^2 \le \int_\Omega|\nabla\varphi|^2$ für alle $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt.
iii) Ist $q > 1$, so gibt es $c > 0$ mit

$$\|\nabla e^{t\Delta}\varphi\|_{L^q(\Omega)} \le ce^{-\lambda_1 t}\|\nabla\varphi\|_{L^q(\Omega)} \qquad \forall t > 0, \forall\varphi \in C^1(\overline{\Omega}).$$

iv) Zu $1 < q \le p \le \infty$ existiert $c > 0$ derart, dass

$$\|e^{t\Delta}\nabla\cdot\varphi\|_{L^p(\Omega)} \le c(1+t^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})})e^{-\lambda_1 t}\|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall t > 0, \forall\varphi \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \text{ mit } \varphi\cdot\nu\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

[1] Die Bedeutung ist noch zu präzisieren.

Hausaufgabe 3:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes beschränktes Gebiet und $w \in C^2(\overline{\Omega})$ eine positive Funktion mit $\partial_\nu w = 0$ auf $\partial\Omega$.

a) Zeige:

$$\int_\Omega \frac{|\nabla w|^4}{w^3} \leq (2+\sqrt{n})^2 \int_\Omega w|D^2 \ln w|^2.$$

(Integriere dazu in $\int_\Omega \frac{|\nabla w|^4}{w^3} = \int_\Omega |\nabla \ln w|^2 \nabla \ln w \cdot \boldsymbol{\nabla} w$ partiell und nutze die CSU.)

b) Zeige: $w|D^2 \ln w|^2 = \frac{|\nabla w|^4}{w^3} + \frac{1}{w}|D^2 w|^2 - \frac{1}{w^2}\nabla|\nabla w|^2 \cdot \nabla w$ in Ω und

$$\int_\Omega w|D^2 \ln w|^2 = \int_\Omega \frac{1}{w}|D^2 w|^2 + \int_\Omega \frac{1}{w^2}|\nabla w|^2 \Delta w - \int_\Omega \frac{|\nabla w|^4}{w^3}.$$

c) Zeige, dass außerdem

$$\frac{3}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla w|^2 \Delta w}{w^2} = \int_\Omega \frac{1}{w}|\Delta w|^2 + \int_\Omega \frac{|\nabla w|^4}{w^3} - \int_\Omega \frac{1}{w}|D^2 w|^2 + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{w}\partial_\nu |\nabla w|^2.$$

Tipp: Integriere dazu in $\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}(-\frac{1}{w}) \cdot \nabla w \Delta w$ und dem in der zugehörigen Rechnung auftretenden Integral $\int_\Omega \frac{\nabla w \cdot \boldsymbol{\nabla}|\nabla w|^2}{w^2}$ jeweils partiell.

d) Folgere, dass

$$-\int_\Omega \frac{|\Delta w|^2}{w} \leq -\int_\Omega w|D^2 \ln w|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla w|^2}{w^2}\Delta w,$$

sofern Ω konvex ist.

Hausaufgabe 4:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, glatt berandetes, konvexes Gebiet und $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ positiv.

a) Zeige: Für $\alpha \in (0,1)$ ist

$$2\alpha \int_\Omega \frac{1}{u^{1+\alpha}}\nabla|\nabla u|^2 \cdot \nabla u \leq 2\int_\Omega \frac{|D^2 u|^2}{u^\alpha} + 2\alpha^2 \int_\Omega \frac{|\nabla u|^4}{u^{2+\alpha}}.$$

b) Zeige: Zu $\alpha \in (0,1)$ existiert $c > 0$ so, dass

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^\alpha} \leq -c\int_\Omega \frac{|\nabla u|^4}{u^{2+\alpha}} \quad \text{auf } (0,\infty).$$

c) Zeige: Zu $\alpha \in (0,1)$ existiert $c > 0$ so, dass

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(\cdot,t)|^2}{u^\alpha(\cdot,t)} \leq \frac{c}{t}\int_\Omega u_0^{2-\alpha} \quad \text{für alle } t > 0$$

und

$$\|\nabla u\|_{L^{2-\alpha}(\Omega)} \leq ct^{-\frac{1}{2}}\|u_0\|_{L^{2-\alpha}(\Omega)}.$$

d) Formuliere und beweise Lemma 1.6 für $p \in [1,2)$.