Michael Winkler
Johannes Lankeit

20. Juli 2016

13. Übung zur Vorlesung „Differentialgleichungen der mathematischen Biologie“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
Beweise Cor. 4.4: Unter den Voraussetzungen von 4.2 gelte zusätzlich

$$\mathcal{F}(u_0, v_0) \leq -2C(m, K).$$

Dann ist $T_{max} < \infty$.
Leite dazu eine Differentialungleichung für $y = -\mathcal{F}(u, v)$ her.

Präsenzaufgabe 2:
Beweise Lemma 4.13: Es seien $n \geq 3$, $q > n$, $m > 0$ und $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$, $v_0 \in W^{1,q}(\Omega)$ radial und positiv in $\overline{\Omega}$ und es gelte $\int_\Omega u = m$. Dann gibt es zu jedem $p \in (1, \frac{2n}{n-2})$ Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^0(\overline{\Omega})$ und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{1,q}(\Omega)$ radialsymmetrischer, in $\overline{\Omega}$ positiver Funktionen mit $\int_\Omega u_k = m$ für alle $k \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$u_k \to u \text{ in } L^p(\Omega) \text{ und } v_k \to v \text{ in } W^{1,q}(\Omega) \text{ für } k \to \infty$$

sowie

$$\mathcal{F}(u_k, v_k) \to -\infty \quad \text{für } k \to \infty$$

gelten.
Wähle dazu eine beliebige Folge $(r_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0, \min\{1, R\})$ mit $r_k \searrow 0$ und definiere

$$\varphi(\xi) := \int_0^1 \rho^{n-1} \cdot (\rho^2 + \xi)^{-\frac{n}{2}} d\rho, \quad \xi > 0.$$

Begründe, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $\eta_k \in (0, R^2)$ mit

$$r_k^n \varphi\left(\frac{\eta_k}{r_k^2}\right) \geq k$$

gibt und dass man (wegen $p < \frac{2n}{n-2}$) eine Zahl $\alpha \in (n - \frac{n}{p}, \frac{n-2}{2})$ wählen kann.
Wir definieren damit

$$\widetilde{u}_k(r) := \begin{cases} a_k \cdot (r^2 + \eta_k)^{-\frac{n-\alpha}{2}}, & r \in [0, r_k], \\ u(r), & r \in (r_k, R], \end{cases}$$

und

$$u_k := m \cdot \frac{\widetilde{u}_k}{\|\widetilde{u}_k\|_{L^1(\Omega)}}$$

sowie

$$v_k(r) := \begin{cases} b_k (r^2 + \eta_k)^{-\frac{\alpha}{2}}, & r \in [0, r_k], \\ v(r), & r \in (r_k, R], \end{cases}$$

mit

$$a_k := (r_k^2 + \eta_k)^{\frac{n-\alpha}{2}} u(r_k) \quad \text{und} \quad b_k := (r_k^2 + \eta_k)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot v(r_k)$$

für $k \in \mathbb{N}$. Dann sind $\widetilde{u}_k$ und u_k stetig und positiv in $\overline{\Omega}$ mit $\int_\Omega u_k = m$, und es ist $v_k \in W^{1,q}(\Omega)$.
Beweise nun, dass $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to \infty$. Betrachte zunächst $\lim_{k\to\infty} \|\widetilde{u}_k\|_{L^p(B_{r_k})}$.
Zeige weiter, dass $v_k \to v$ in $W^{1,2}(\Omega)$ für $k \to \infty$.
Begründe, dass

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_k|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega v_k^2 + \int_\Omega u_k \ln u_k \to \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega v^2 + \int_\Omega u \ln u \quad \text{für } k \to \infty$$

und dass $C > 0$ existiert mit

$$\mathcal{F}(u_k, v_k) \leq C - \int_\Omega u_k v_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass mit einem $c > 0$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ und $r \in (0, r_k)$ gilt, dass

$$u_k(r)v_k(r) \geq c r_k^n (r^2 + \eta_k)^{-\frac{n}{2}}.$$

Schließe, dass

$$\int_\Omega u_k v_k \geq \omega_n \cdot c \cdot r_k^n \cdot \varphi\left(\frac{\eta_k}{r_k^2}\right)$$

und damit $\mathcal{F}(u_k, v_k) \to \infty$ für $k \to \infty$.

Präsenzaufgabe 3:
Beweise Lemma 4.1: Die Lösung (u, v) von (1) genügt der Gleichung

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(\cdot,t), v(\cdot,t)) = -\mathcal{D}(u(\cdot,t), v(\cdot,t)) \quad \text{für alle } t \in (0, T_{max}),$$

worin

$$\mathcal{F}(u,v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega v^2 - \int_\Omega uv + \int_\Omega u \ln u$$

und

$$\mathcal{D}(u,v) = \int_\Omega |\Delta v - v + u|^2 + \int_\Omega \left|\frac{\nabla u}{\sqrt{u}} - \sqrt{u}\nabla v\right|^2.$$

Hausübungen

Abgabe: Ad Kalendas Graecas, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:
Bereite dich auf die Klausur vor. 11.08.2016, 9:00 Uhr, D1 303.