Michael Winkler
Johannes Lankeit

20. April 2016

2. Übung zur Vorlesung „Differentialgleichungen der mathematischen Biologie“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
Zeige: Falls man im Vergleichssatz 1.2.5 die Voraussetzung lokaler Lipschitz-Stetigkeit durch die von Stetigkeit ersetzt, wird die Aussage falsch.

Präsenzaufgabe 2:
Es seien $a, \alpha, \beta, u_0 \in (0, \infty)$. Bestimme das Langzeitverhalten der Lösung u von

$$\begin{cases} u' = \alpha u^2 - a u^\beta, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Präsenzaufgabe 3:
Zeige: Falls $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist, existiert für $y_0 \in \mathbb{R}$ die Lösung von

$$\begin{cases} y' = f(y), \quad t > 0, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

global.

Präsenzaufgabe 4:
Bestimme eine Lösung u des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{\alpha}{t+1} u(t) - a u^2(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0 > 0 \end{cases}$$

für $\alpha, a > 0$ und bestimme $\lim_{t\to\infty} u(t)$.
Welches biologische Szenario könnte dieses Anfangswertproblem beschreiben?

Hausübungen

Abgabe: 27. April 2016, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:

Es seien $0 < b < a$ und $c > 0$ sowie $u_0 > 0$. Beschreibe das Langzeitverhalten aller Lösungen von

$$\begin{cases} u' = cu(a-u)(u-b), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Hausaufgabe 2:

Zeige: Gilt $\alpha(t) \to 0$ für $t \to \infty$, so folgt für jedes $u_0 > 0$, dass die Lösung u von

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha(t)u(t) - au^2(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

die Eigenschaft $u(t) \to 0$ für $t \to \infty$ hat.

Hausaufgabe 3:

Eine Schädlingspopulation soll dadurch bekämpft werden, dass sterile Männchen ausgesetzt werden. Ein Modell dafür beschreibt die Entwicklung der Populationsgröße der Schädlingsmännchen durch

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)\left(\alpha \frac{u(t)}{u(t)+s} - \beta\right), & t > 0, \\ u(0) = u_0 > 0, \end{cases}$$

worin α, β, s positive Parameter sind.
Zeige: Es gibt eine globale Lösung.
Wie groß muss die (konstante) Rate s der freigesetzten sterilen Männchen gewählt werden, damit die Schädlingspopulation ausstirbt?

Hausaufgabe 4:

Es seien $a, b > 0$ und (u, v) eine Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) = a - bu(t) + \frac{u^2(t)}{v(t)} \cdot \chi_{\{v \neq 0\}}(t), & t > 0, \\ v'(t) = -v(t) + u^2(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0 > 0, \quad v(0) = v_0 > 0. \end{cases}$$

Zeige, dass beide Komponenten positiv sind.