

3. Übung zur Vorlesung „Differentialgleichungen der mathematischen Biologie“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:

Zeige, dass ohne weitere Voraussetzungen (wie Kooperativität) kein Vergleichssatz für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen gilt. Genauer: Finde (Lipschitz-stetige) Funktionen $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sowie Funktionen $u, v \in C^0([0, \infty); \mathbb{R}^2) \cap C^1((0, \infty); \mathbb{R}^2)$ derart, dass

$$u_1(0) \leq v_1(0), u_2(0) \leq v_2(0), \quad u'_1 \leq f(u_1, u_2), u'_2 \leq g(u_1, u_2), \quad v'_1 \geq f(v_1, v_2), v'_2 \geq g(v_1, v_2)$$

gilt, dass aber

$$u_1 \leq v_1, u_2 \leq v_2$$

nicht auf ganz $(0, \infty)$ erfüllt ist.

Präsenzaufgabe 2:

Beweise Behauptung 2 aus dem Beweis von Satz 2.1.7: Sind $\alpha, \beta, a, b, A, B, u_0, v_0 > 0$ mit $ab > AB$ und löst (u, v)

$$\begin{cases} u' = \alpha u - au^2 + Auv \\ v' = \beta v - bv^2 + Buv \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0, \end{cases}$$

so gibt es $c, d, \gamma > 0$ mit

$$u(t) \geq u_s - ce^{-\gamma t}, v(t) \geq v_s - de^{-\gamma t} \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

worin

$$u_s = \frac{\alpha b + \beta A}{ab - AB}, \quad v_s = \frac{\beta a + \alpha B}{ab - AB}.$$

Präsenzaufgabe 3:

Betrachte das Ross-Macdonald-Modell für die Ausbreitung von Malaria:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha y(1 - x) - rx \\ y' &= \beta x(1 - y) - \mu y. \end{aligned}$$

Darin beschreibt x den infizierten Anteil der menschlichen Bevölkerung, y den der weiblichen Moskitopopulation; α gibt die Rate an, mit der Menschen von Moskitos infiziert werden, β die Rate, mit der sich Moskitos bei Menschen infizieren; $\frac{1}{r}$ beschreibt die durchschnittliche Dauer einer Infektion beim Menschen, $\frac{1}{\mu}$ die Lebenszeit eines Moskitos. Bezeichnet N die Bevölkerungszahl der Menschen, M die Größe der Moskitopopulation und a , wie oft ein infizierter Mosquito Menschen sticht, ist $\alpha = \frac{a\beta M}{N}$.

- Warum ist es aus biologischer Sicht naheliegend, dass das System kooperativ sein sollte?
- Ist das System kooperativ?
- Zeige, dass konstante Lösungen entweder

$$\text{mit}(0, 0) \quad \text{oder mit} \quad \left(\frac{R-1}{R + \frac{\beta}{\mu}}, \left(\frac{R-1}{R} \right) \left(\frac{\frac{\beta}{\mu}}{1 + \frac{\beta}{\mu}} \right) \right)$$

übereinstimmen, wenn die „Malariaübertragungsrate“ R durch

$$R = \frac{M}{N} \frac{\beta^2 a}{\mu r}$$

gegeben ist.

Hausübungen

Abgabe: 4. Mai 2016, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:

Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $u \in C^1((0, \infty))$ löse $u' = f(u)$. Zeige: Unter der Annahme, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ existiert, gilt $f(\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)) = 0$. Gib auch eine Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^n$ -wertige Funktionen f an.

Hausaufgabe 2:

Es seien $\alpha, \beta, a, b, A, B, u_0, v_0 > 0$ mit $ab = AB$. Zeige: Dann ist die Lösung (u, v) von

$$\begin{cases} u' = \alpha u - au^2 + Auv \\ v' = \beta v - bv^2 + Buv \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \end{cases}$$

unbeschränkt. Tipp: Verwende $(\underline{u}(t), \underline{v}(t)) = (ce^{\gamma t}, de^{\gamma t})$ mit geeigneten $c, d, \gamma > 0$.

Hausaufgabe 3:

Eine Lösung $u_{u_0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Systems

$$u'_{u_0} = f(u_{u_0}), \quad u_{u_0}(0) = u_0$$

(mit Lipschitz-stetigem $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) heißt periodisch mit Periode $T \neq 0$, falls $u_{u_0}(t+T) = u_{u_0}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

- Zeige, dass die Menge $P = \{0\} \cup \{s; s \text{ ist Periode von } u_{u_0}\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{R}$ ist.
- Beweise: Wenn P dicht in $\mathbb{R}$ liegt, besteht $\{u_{u_0}(t); t > 0\}$ genau aus einem Gleichgewichtspunkt u_0 .
- Sei nun das System kooperativ. Es gebe $T > 0$, sodass $u_{u_0}(T) \leq u_0$ (in jeder Komponente). Ferner sei p ein Häufungspunkt von $\{u_{u_0}(kT); k \in \mathbb{N}\}$. Zeige, dass dann $u_{u_0}(T+t) \leq u_{u_0}(t)$ für alle $t > 0$ und $p = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{u_0}((k+1)T) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{u_0}(kT)$ ist, und folgere, dass u_p periodisch mit Periode T ist und dass

$$\text{dist}(u_{u_0}(t), \gamma_p) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty,$$

worin $\gamma_p = \{u_p(t); t > 0\} = \{u_p(t); t \in [0, T]\}$.

- Beweise: Wenn zu einer beschränkten Lösung u eines kooperativen Systems ein $T \in (0, \infty)$ existiert, sodass (komponentenweise) $u(T) < u_0$, so besteht

$$\omega(u) := \{x; \text{Es gibt eine Folge } (t_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty \text{ so, dass } \lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k) = x\}$$

aus genau einem Gleichgewichtspunkt. Dieselbe Aussage gilt auch für „ $>$ “ statt „ $<$ “.

- Zeige, dass jede beschränkte Lösung eines zweidimensionalen kooperativen Systems konvergiert.

Hausaufgabe 4:

Betrachte nochmals das Ross-Macdonald-Modell.

- Zeige, dass Lösungen (x, y) zu Anfangswerten $(x(0), y(0)) \in [0, 1]^2$ global sind und $(x(t), y(t)) \in [0, 1]^2$ für alle $t > 0$ erfüllen. (Warum ist gerade die Menge $[0, 1]^2$ relevant?)
- Beschreibe alle Möglichkeiten für das Langzeitverhalten solcher Lösungen.
- Ist es nach dem Modell erforderlich, alle Moskitos zu töten, um den Malariaerreger auszurotten?

Hausaufgabe 5:

Die Gonorrhoe ist eine der häufigsten sexuell übertragbaren Krankheiten. Das folgende Modell beschreibt die Ausbreitung in einer Population, die aus mehreren (n) Teilpopulationen besteht. Die i -te Teilpopulation setzt sich dabei aus x_i Gesunden und y_i Infizierten zusammen (wobei sie insgesamt konstante Größe $c_i = x_i + y_i$ habe), die Zahlen α_i geben die jeweilige Heilungsrate an, β_{ji} den Anteil der Gesunden in Gruppe i , die ein Infizierter aus Gruppe j pro Zeiteinheit ansteckt (wobei $\beta_{ij} \neq 0$ auch $\beta_{ji} \neq 0$ nach sich ziehen sollte). Das zugehörige System gewöhnlicher Differentialgleichungen lautet

$$y'_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ji} x_i y_j - \alpha_i y_i.$$

- Stelle ein gleichwertiges System auf, das ohne x_i auskommt.
- Zeige mithilfe des Vergleichssatzes für kooperative Systeme, dass Lösungen, die von Anfangsdaten $y_0 \in \prod_{i=1}^n [0, c_i]$ starten, für alle Zeiten in dieser Menge verlaufen.
- Findest du für das 2-Subpopulationen-Szenario mit $\beta_{11} = 0 = \beta_{22}$ (welcher biologischen Situation entspräche das?) eine Bedingung an die Modellparameter, unter denen die Krankheit auf lange Sicht ausstirbt?