

4. Übung zur Vorlesung „Differentialgleichungen der mathematischen Biologie“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:

Zeige: Löst $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein kompetitives System, so ist $u(-(\cdot)): [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Lösung eines kooperativen Systems.

Präsenzaufgabe 2:

Betrachte das System

$$\begin{cases} u' = u^2(1 - u - \frac{1}{2}v) \\ v' = v^2(1 - v - \frac{1}{2}u) \end{cases}$$

für positive Anfangsdaten. Zeige, dass die Lösungen beschränkt sind, und bestimme ihr Langzeitverhalten.

Präsenzaufgabe 3:

a) Es sei X ein metrischer Raum und $F_0, F_n: X \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, Abbildungen, für die eine Zahl $q \in [0, 1)$ existiert, sodass

$$d(F_n(x), F_n(y)) \leq qd(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X, n \in \mathbb{N}_0.$$

Ferner gelte $F_n \rightarrow F_0$ für $n \rightarrow \infty$ im Sinne gleichmäßiger Konvergenz. Es seien $x_n \in X$ mit $x_n = F_n(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige: Es gilt $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$.

b) Es sei f lokal Lipschitz-stetig. Folgere, dass die Lösungen des Anfangswertproblems

$$u' = f(u), \quad u(0) = u_0 \tag{1}$$

stetig von den Anfangsdaten abhängen. Genauer: Ist $u_{0,n} \rightarrow u_0$ für $n \rightarrow \infty$ und $u'_n = f(u_n)$ auf $(0, T_{\max,n})$, $u_n(0) = u_{0,n}$ und $T \in (0, \infty)$ so, dass $T < T_{\max,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\|u_n - u\|_{L^\infty((0,T))} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

c) Eine Menge M heißt „positiv invariant“, falls für jede Lösung von (1) aus $u_0 \in M$ bereits $u(t) \in M$ für alle $t \in [0, T_{\max})$ folgt. Zeige: Ist M positiv invariant, so auch $\bar{M}$.

Hausübungen

Abgabe: 11. Mai 2016, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $u: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Lösung des kompetitiven Systems

$$u' = f(u)$$

mit einer lokal Lipschitz-stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ derart¹, dass in jeder Umgebung einer Nullstelle x_0 von f_i auch x_1, x_2 existieren mit $f_i(x_1) > 0 > f_i(x_2)$.

Zeige: I ist die disjunkte Vereinigung der folgenden Mengen:

$$A_1 = \{t \in I : f_1(u(t)) \geq 0, f_2(u(t)) \geq 0\},$$

$$A_2 = \{t \in I : f_2(u(t)) > 0 > f_1(u(t))\},$$

$$A_3 = \{t \in I : f_1(u(t)) \leq 0, f_2(u(t)) \leq 0\},$$

$$A_4 = \{t \in I : f_2(u(t)) < 0 < f_1(u(t))\}.$$

Zeige weiter: Ist $s \in A_1$, so gilt $t \in A_1$ für alle $s > t \in I$. Dasselbe gilt für A_3 . Außerdem ist eine der Mengen A_1 und A_3 leer.

Zeige schließlich: I ist die Vereinigung zweier Intervalle, auf denen u_1 und u_2 jeweils monoton sind.

Falls u beschränkt ist, konvergiert u .

Hausaufgabe 2:

Es seien $a > 1$ und $b > 1$. Wir betrachten Lösungen von

$$\begin{cases} u' = u(1 - u - av) \\ v' = \mu v(1 - v - bu) \end{cases} \quad (2)$$

zu Anfangswerten $(u_0, v_0) \in (0, \infty)^2$. Bezeichne $S_1 = (0, 0)$, $S_2 = (0, 1)$, $S_3 = (1, 0)$, $S_4 = (\frac{a-1}{ab-1}, \frac{b-1}{ab-1})$.

a) Zeige: Alle Lösungen sind konvergent.

b) Wir betrachten die Einzugsbereiche

$$E_i = \{(u_0, v_0) \in (0, \infty)^2; \text{ Die Lösung mit Anfangswert } (u_0, v_0) \text{ konvergiert gegen } S_i\}$$

der Gleichgewichtspunkte im positiven Quadranten.

Zeige: E_1 ist leer, E_2 und E_3 sind offen, E_2, E_3, E_4 sind zusammenhängend.

c) Gibt es Anfangswerte außer S_4 so, dass die zugehörigen Lösungen gegen S_4 konvergieren?

d) Zeige: Ist $u_0 > \frac{a-1}{ab-1}$ und sind $v_1, v_2 > 0$ so, dass die Lösungen zu Anfangswerten (u_0, v_1) und (u_0, v_2) gegen S_4 konvergieren, so gilt für alle $\tilde{v} \in (v_1, v_2)$, dass auch $(u_0, \tilde{v}) \in E_4$.

¹Dies dient zur Vereinfachung des Beweises, ist aber wahrscheinlich nicht erforderlich.