Michael Winkler
Johannes Lankeit

11. Mai 2016

5. Übung zur Vorlesung „Differentialgleichungen der mathematischen Biologie“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
In der Biologie werden Grundregeln für die zeitliche Entwicklung wechselwirkender Räuber- und Beutepopulationen als die folgenden Lotka-Volterra-Regeln angegeben (hier in der Formulierung von https://de.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra-Regeln):

- Erste Lotka-Volterra-Regel (Periodische Populationsschwankung): Die Populationsgrößen von Räuber und Beute schwanken periodisch. Dabei folgen die Schwankungen der Räuberpopulation phasenverzögert denen der Beutepopulation. Die Länge der Perioden hängt von den Anfangsbedingungen und von den Wachstumsraten der Populationen ab.
- Zweite Lotka-Volterra-Regel (Konstanz der Mittelwerte): Die über genügend lange Zeiträume gemittelten Größen (Mittelwert) der Räuber- bzw. Beutepopulation sind konstant. Die Größe der Mittelwerte hängt nur von den Wachstums- und Rückgangsraten der Populationen, nicht aber von den Anfangsbedingungen ab.
- Dritte Lotka-Volterra-Regel (Störung der Mittelwerte): Werden Räuber- und Beutepopulation gleichermaßen proportional zu ihrer Größe dezimiert, so vergrößert sich kurzfristig der Mittelwert der Beutepopulation, während der Mittelwert der Räuberpopulation kurzfristig sinkt.

Inwiefern sind diese Regeln in Abschnitt 2.3 der Vorlesung wiederzufinden?

Präsenzaufgabe 2:
Betrachte das folgende SIR-Modell:

$$S' = -\beta SI, \qquad I' = \beta SI - \gamma I$$

und beschreibe das Langzeitverhalten von Lösungen mit positiven Anfangswerten. Inwiefern könnte folgende Modellvariante besser sein, welche zusätzlichen Effekte sind dort berücksichtigt?

$$S' = B - \beta SI - \mu S, \qquad I' = \beta SI - \gamma I - \mu I$$

Weise die globale Existenz von Lösungen nach.

Präsenzaufgabe 3:
Es seien $\omega > 0$ und $c > 0$. Definiere

$$u(x,t) := c\sin(\omega x)e^{-\omega^2 t}, \qquad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

und berechne u_{xx} sowie u_t.

Hausübungen

Abgabe: 25. Mai 2016, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:

Sind $\varphi_1(x) = Bx - \beta \ln x$, $\varphi_2(y) = Ay - \alpha \ln y$, $c_1 = \beta(1 - \ln \frac{\beta}{B}) = \max_{x>0} \varphi_1(x)$, $c_2 = \alpha(1 - \ln \frac{\alpha}{A} = \max_{y>0} \varphi_2(y)$ und $c > c_1 + c_2$, so ist die Menge

$$\Gamma_c := \{(x, y) \in (0, \infty)^2; \varphi_1(x) + \varphi_2(y) = c\}$$

eine geschlossene, stetig differenzierbare Kurve in $(0, \infty)^2$.
Tipp: Da $\varphi_2' > 0$ auf (v_s, ∞) und $\varphi_2' < 0$ auf $(0, v_s)$ mit $v_s := \frac{\alpha}{A}$, bildet φ_2 sowohl $[v_s, \infty)$ als auch $(0, v_s]$ bijektiv auf $[c_1, \infty)$ ab und hat daher jeweils eine Umkehrfunktion ψ_2^+ bzw. ψ_2^-. Für jedes $c > c_1 + c_2$ ist nun $M_c := \{x \in (0, \infty); c - \varphi_1(x) > c_2\}$ nicht leer, und für alle $x \in M_c$ liegen $(x, \psi_2^+(c - \varphi_1(x)))$ und $(x, \psi_2^-(c - \varphi_1(x)))$ in Γ_c.

Hausaufgabe 2:

Betrachte das System

$$\begin{aligned} u' &= u - \alpha uv - \beta u^2, \\ v' &= -\gamma v + \delta uv - \zeta v^2, \\ (u, v)(0) &= (u_0, v_0) \in (0, \infty)^2 \end{aligned}$$

für $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta > 0$.
a) Existieren die Lösungen global? Was lässt sich über ihr Langzeitverhalten sagen?
Gib einen Parameterbereich an, für den sich Konvergenz nachweisen lässt.
Finde auch für andere Parameter beispielsweise eine echte (möglichst kleine) Teilmenge M von $[0, \infty)^2$ so, dass $\operatorname{dist}((u(t), v(t)), M) \to 0$ für $t \to \infty$.
b) Untersuche das System für $\zeta = 0$ auf dieselbe Fragestellung.

Hausaufgabe 3:

Es sei $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ sowie $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Wir setzen $M := V^{-1}((-\infty, 0])$.
Wir wollen das System

$$u' = f(u), \qquad u(0) = u_0$$

betrachten.
a) Zeige: Falls

$$\nabla V(x) \cdot f(x) < 0 \qquad \text{für alle } x \in \partial M,$$

so ist M positiv invariant (d.h.: ist $u_0 \in M$, so gilt auch $u(t) \in M$ für alle $t \in (0, T_{max})$).
b) Zeige: Ist sogar $V \in C^2$ und $\nabla V \neq 0$ auf ∂M und gilt die nicht notwendigerweise strikte Ungleichung

$$\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in \partial M,$$

so ist M positiv invariant.
Tipp: Betrachte $u' = g_\lambda(u)$ mit $g_\lambda = f - \lambda \nabla V$. Formuliere und nutze eine Aussage zu „stetiger Abhängigkeit der Lösungen vom Parameter λ".
c) Es sei nun $\Sigma := \bigcap_i M_i$ mit $M_i = V^{-1}((-\infty, 0])$ für $V_i \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ und alle $i \in \{1, \ldots k\}$ mit einem $k \in \mathbb{N}$. Weiterhin gelte

$$\nabla V_i(x) \cdot f(x) \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in \partial\Sigma, \text{ für die } V_i(x) = 0.$$

Zeige, dass dann Σ positiv invariant ist.
d) Es seien $a \in (0, 1)$, $b, \gamma > 0$ und $I \in \mathbb{R}$. Betrachte das System

$$\begin{aligned} v_t &= v(a - v)(v - 1) - w + I \\ w_t &= bv - \gamma w \end{aligned}$$

und finde invariante Rechtecke.
Zeige, dass Lösungen zu allen Anfangsdaten global sind.