Michael Winkler
Johannes Lankeit

25. Mai 2016

6. Übung zur Vorlesung „Differentialgleichungen der mathematischen Biologie“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
Beweise Satz 2.2.18: Es seien $a > 1$, $b > 1$ und $\mu > 0$ sowie $u_0 > 0$ und $v_0 > 0$. Dann hat (24) eine globale beschränkte Lösung (u, v).

i) Sind $u_0 = \frac{a-1}{ab-1}$ und $v_0 = \frac{b-1}{ab-1}$, so gelten $u \equiv \frac{a-1}{ab-1}$ und $v \equiv \frac{b-1}{ab-1}$.

ii) Gelten $u_0 > \frac{a-1}{ab-1}$ und $v_0 < \frac{b-1}{ab-1}$, so folgt $u(t) \to 1$ und $v(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

iii) Sind $u_0 < \frac{a-1}{ab-1}$ und $v_0 > \frac{b-1}{ab-1}$, so haben wir $u(t) \to 0$ und $v(t) \to 1$ für $t \to \infty$.

Tipp: Wähle in Lemma 2.2.16 zunächst δ und dann ε geeignet.

Präsenzaufgabe 2:
Nutze einen Separationsansatz, um nichttriviale Lösungen der Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^2$$

zu finden.

Präsenzaufgabe 3:
Zeige: Ist $f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass für jedes $t > 0$ gilt, dass $f(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$, und dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $f(x, \cdot) \in C^1((0, \infty))$, und gibt es ferner $h \in L^1(\mathbb{R})$ mit

$$|f_t(x, t)| \le h(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

so ist

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t) \, \mathrm{d}x$$

differenzierbar mit $F'(t) = \int_{\mathbb{R}} f_t(x, t) \, \mathrm{d}x$.

Hausübungen

Abgabe: 1. Juni 2016, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:
Nutze den selbstähnlichen Ansatz

$$u(x,t) = t^{-\alpha} f(t^{-\beta}|x|), \qquad t > 0, t^{-\beta}|x| \leq R,$$

für ein $R > 0$, um für $m > 1$ eine Lösung der Gleichung

$$u_t = \Delta u^m$$

zu finden.
Tipp: Nutze neben dem Vorgehen aus der Vorlesung die Forderung, dass $(0, \infty) \ni t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\, \mathrm{d}x$ konstant sein möge, um einen Zusammenhang zwischen α und β herzustellen.
Tipp: Um $\frac{1}{r^{n-1}}(r^{n-1}(f^m)')' + \beta r f' + \beta n f = 0$ zu lösen, könnte sich die Gleichheit $\beta r f' + n\beta f = \frac{\beta}{r^{n-1}}(r^n f)'$ als hilfreich erweisen.

Hausaufgabe 2:
Finde durch einen Separationsansatz nichttriviale Lösungen der Gleichungen

a) $u_t = -u_{xxx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R};$

b) $u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R};$

Hausaufgabe 3:
Zeige, dass Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \qquad u(\cdot, 0) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}$$

nicht eindeutig sind.
Betrachte dazu

$$u(x,t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$$

mit

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$