Michael Winkler
Johannes Lankeit

1. Juni 2016

7. Übung zur Vorlesung „Differentialgleichungen der mathematischen Biologie“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $u_0 \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ eine Funktion mit $u_0(-x) = u_0(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Lösung u von

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases}$$

für alle positiven Zeiten t ebenfalls $u(x,t) = u(-x,t)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $u_0 \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ monoton. Zeige, dass dann auch die zugehörige Lösung der Wärmeleitungsgleichung in jedem $t > 0$ monoton bezüglich x ist.

Präsenzaufgabe 3:
Es sei $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ unstetig. Wir setzen

$$u(x,t) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t) u_0(y) \, \mathrm{d}y, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u_0(x), & x \in \mathbb{R}, t = 0. \end{cases}$$

a) Zeige: Dann ist u keine klassische Lösung des Cauchy-Problems der Wärmeleitungsgleichung im Sinne von Satz 1.2.7.
b) Zeige: Es gilt trotzdem $u_t = \Delta u$ in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ (und insbesondere existieren diese Ableitungen).
c) Gib eine „Lösung“ der Wärmeleitungsgleichung zu Anfangsdaten $u_0 = \chi_{[-1,1]}$ an.
d) An welchen Stellen ist die in c) gefundene Lösung stetig?
e) Untersuche zudem ihr Langzeitverhalten.

Hausübungen

Abgabe: 8. Juni 2016, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:

Die Funktion $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sei punktsymmetrisch um den Ursprung, d.h. $u_0(x) = -u_0(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass die Lösung u der Wärmeleitungsgleichung zu diesen Anfangsdaten diese Symmetrieeigenschaft erhält, dass also $u(\cdot, t)$ für alle $t > 0$ ebenfalls punktsymmetrisch um den Ursprung ist.

Hausaufgabe 2:

Es seien $v > 0$ und $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, \infty)$ eine Lösung von

$$u_t = Du_{xx} - vu_x$$

zu einer anfänglichen „Punktmassenkonzentration" (vgl. 1.1.4-1.1.6). Finde eine Darstellung für diese Lösung. Betrachte dazu $w(t, z) := u(t, z + vt)$: Welche partielle Differentialgleichung löst w?

Hausaufgabe 3:

Es sei $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to-\infty} u_0(x) = a$, $\lim_{x\to\infty} u_0(x) = b$. Beschreibe das Langzeitverhalten von

$$u(x, t) := \int_{\mathbb{R}} G(x - y, t)u_0(y)\ \mathrm{d}y.$$

Hausaufgabe 4:

Satz 1. *Die Funktion $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ habe kompakten Träger. Dann gilt für*

$$u(x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t - s)f(y, s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s,$$

dass $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ und $u_t - \Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ sowie $\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x, t) = 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Zeige, dass

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(y, s)f(x - y, t - s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s$$

und

$$u_t(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(y, s)f_t(x - y, t - s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s + \int_{\mathbb{R}^n} G(y, t)f(x - y, 0)\ \mathrm{d}y.$$

Berechne auch $u_{x_i x_j}$.
Begründe die Rechenschritte in

$$\begin{aligned}
u_t - \Delta u &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(y, s)\left[(\partial_t - \Delta_x)f(x - y, t - s)\right]\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s + \int_{\mathbb{R}^n} G(y, t)f(x - y, 0)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} G(y, s)\left[(-\partial_s - \Delta_y)f(x - y, t - s)\right]\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s + \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} G(y, s)(-\partial_s - \Delta_y)f(x - y, t - s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} G(y, t)f(x - y, 0)\ \mathrm{d}y \\
&=: I_\varepsilon + J_\varepsilon + K.
\end{aligned}$$

Weise nach, dass $J_\varepsilon \to 0$ für $\varepsilon \to \infty$ und nutze partielle Integration und Eigenschaften von G, um

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} G(y, \varepsilon)f(x - y, t - \varepsilon)\ \mathrm{d}y - K$$

zu zeigen.
Vollende den Beweis des oben angegebenen Satzes.