Michael Winkler
Johannes Lankeit

8. Juni 2016

8. Übung zur Vorlesung „Differentialgleichungen der mathematischen Biologie“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $\Omega = (0,1)$ und $u_0 \in C(\overline{\Omega})$. Zeige:

$$u_t = \Delta u, \qquad u(\cdot,0) = u_0$$

hat mehrere Lösungen.

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes glattes Gebiet und u eine klassische Lösung des homogenen Neumannproblems der Wärmeleitungsgleichung in $\Omega \times (0,\infty)$. Zeige, dass $t \mapsto \int_\Omega |\nabla u(\cdot,t)|^2$ monoton fällt.

Präsenzaufgabe 3:
Es seien $T > 0$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig. Nutze die Grönwallsche Ungleichung, um zu zeigen, dass Lösungen von

$$u' = f(u), t \in (0,T), \qquad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}$$

stetig vom Anfangswert u_0 abhängen.

Präsenzaufgabe 4:
Es sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Gib das (äußere Einheits-)Normalenvektorfeld auf $\partial\Omega$ an.

Präsenzaufgabe 5:
Es sei $\Omega = (0,\infty)$ und $u_0 \in C^0(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$. Gib eine Lösung für

$$u_t = \Delta u, \qquad u(\cdot,0) = u_0, \qquad \partial_\nu u(0) = 0$$

an.

Hausübungen

Abgabe: 15. Juni 2016, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Zeige, dass es ein $C > 0$ derart gibt, dass zu jeder Funktion $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $\int_\Omega u_0 = 0$ die Lösung von

$$u_t = \Delta u, \qquad \partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0$$

die Ungleichung

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le \|u_0\|_{L^2(\Omega)} e^{-Ct}$$

für alle $t > 0$ erfüllt.
Kann man auf die Bedingung $\int_\Omega u_0 = 0$ verzichten?

Hausaufgabe 2:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes konvexes Gebiet und $w \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $\partial_\nu w = 0$ auf $\partial\Omega$. Zeige, dass dann $\partial_\nu |\nabla w|^2 \leq 0$ auf $\partial\Omega$.

Anleitung: Es sei $x_0 \in \partial\Omega$ und oBdA $x_0 = 0$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von 0, $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, so, dass mit einer Funktion $\Psi \in C^2(V)$ gilt, dass

$$\partial\Omega \cap U = \{(x, \Psi(x));\, x \in V\}, \quad \Omega \cap U = \{(x, y) \in U;\, x \in V, y < \Psi(x)\}$$

und ferner $\nabla\Psi(0) = 0$, $D^2\Psi(0)$ negativ semidefinit. (Warum ist das möglich?)

Zeige, dass an jeder Stelle $\widetilde{x} = (\widetilde{x}', \Psi(\widetilde{x}')) \in \partial\Omega \cap U$ der Normalenvektor $\nu(\widetilde{x})$ als skalares Vielfaches von $(-\nabla\Psi(\widetilde{x}'), 1)$ geschrieben werden kann, und folgere

$$w_{x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{x_i} w_{x_i} \quad \text{in } \partial\Omega \cap U.$$

Zeige, dass für $j \in \{1, \ldots, n-1\}$

$$w_{x_j x_n}(0) = \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{x_i x_j}(0) w_{x_i}(0).$$

Berechne dann in 0 die Normalenableitung von $|\nabla w|^2$ und zeige, dass sie nicht positiv ist.

Hausaufgabe 3:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes glattes Gebiet.

a) Zeige: Für Funktionen $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $\partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} = 0$ ist mit C_P wie in Satz 2.1.3

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq C_P \int_\Omega |\Delta u|^2.$$

b) Zeige, dass zu jeder Funktion $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ die zugehörige Lösung u des Neumann-Randwertproblems der Wärmeleitungsgleichung die Ungleichung

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} e^{-C_P t} \qquad \text{für alle } t > 0$$

erfüllt.

c) Zeige: Jede Funktion $w \in C^3(\Omega)$ erfüllt $\nabla w \cdot \nabla \Delta w = \frac{1}{2}\Delta|\nabla w|^2 - |D^2 w|^2$ in Ω.

d) Zeige: Ist u wie in b) und Ω konvex, so gilt

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^p \leq -\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla|\nabla u|^{p-2}\nabla|\nabla u|^2 - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}|D^2 u|^2.$$

e) Folgere: Unter den Voraussetzungen von d) ist $\int_\Omega |\nabla u|^p$ für $p > 2$ fallend.

f) Zeige: Erfüllen $p, q, r \in [1, \infty]$ und $a \in (0, 1)$, dass $\frac{1}{p} = \frac{a}{q} + \frac{(1-a)}{r}$, so ist für jede Funktion $w \in C^0(\overline{\Omega})$ bereits $\|w\|_{L^p(\Omega)} \leq \|w\|^a_{L^q(\Omega)} \|w\|^{1-a}_{L^r(\Omega)}$.

g) Zeige, dass in konvexen Gebieten für jedes $p \in [1, \infty)$ die L^p-Norm des Gradienten der Lösung u des Neumann-Randwertproblems der Wärmeleitungsgleichung zu jedem Anfangswert $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ exponentiell gegen 0 konvergiert.