Michael Winkler
Johannes Lankeit

15. Juni 2016

9. Übung zur Vorlesung „Differentialgleichungen der mathematischen Biologie“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $u \in C^2(\overline{\Omega} \times (0, T_{max})) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0, T_{max}))$ eine maximale Lösung von

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - u^3 \\ \partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases}$$

mit nichtnegativen Anfangsdaten $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$. Zeige: u ist nichtnegativ, beschränkt und global. Beschreibe das Langzeitverhalten.

Präsenzaufgabe 2:
Es sei u eine klassische Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \\ \partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

Zeige, dass $\inf_{x\in\Omega} u(x,t)$ monoton wächst.

Präsenzaufgabe 3:
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei lokal Lipschitz-stetig und streng monoton fallend mit $f(42) = 0$. Es löse u das ARWP

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u) \\ \partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

Was lässt sich über das Langzeitverhalten von u sagen?

Präsenzaufgabe 4:
Die folgende Differentialgleichung ist einem Modell entnommen[1], das die Ausbreitung parasitärer Pilze, die Pflanzen befallen, beschreiben soll. Diese Pilze breiten sich dabei mittels zweier verschiedener Typen von Sporen aus. In dem Modell beschreibt v den Anteil der Blattoberfläche, der durch Pilzbefall beschädigt ist, u die Konzentration der Sporen eines Typs:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - u + v^2, \\ v_t = (u+v)(1-v). \end{cases}$$

Wir betrachten dieses System in einem glatten, beschränkten Gebiet Ω mit homogenen Neumannrandbedingungen für u und zu nichtnegativen Anfangsdaten u_0, v_0, wobei $v_0 \le 1$ in Ω sei. Wir nehmen an, (u, v) sei eine globale glatte Lösung[2].
Zeige: $u \ge 0$, $v \ge 0$, $v \le 1$, $\limsup_{t\to\infty} u \le 1$. Kannst du über das Langzeitverhalten noch mehr aussagen?

[1] Wobei für diese Aufgabe alle auftretenden Parameter unrealistischerweise als 1 festgesetzt wurden.
[2] Und klammern die Frage nach Existenz einer solchen ganz aus.

Hausübungen

Abgabe: 22. Juni 2016, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:

a) Beweise den folgenden Satz:
Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes, beschränktes Gebiet und $T > 0$. Weiter sei $f \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T) \times \mathbb{R})$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich des dritten Arguments und $a \in C^1(\overline{\Omega} \times (0,T); \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0,T); \mathbb{R}^n)$ mit $a \cdot \nu \leq 0$ auf $\partial\Omega \times (0,T)$. Sind dann $\overline{u}$ bzw. $\underline{u}$ eine Ober- bzw. Unterlösung der Gleichung

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + a(x,t) \cdot \nabla u(x,t) + f(x,t,u(x,t)), \qquad x \in \Omega, t \in (0,T),$$

und gelten überdies $\partial_\nu \overline{u} \geq \partial_\nu \underline{u}$ auf $\partial\Omega \times (0,T)$ sowie $\overline{u}(\cdot,0) \geq \underline{u}(\cdot,0)$ in Ω, so folgt

$$\overline{u} \geq \underline{u} \qquad \text{in } \overline{\Omega} \times [0,T).$$

b) Es sei $(u,v) \in (C^0(\overline{\Omega} \times [0,T)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,T)))^2$ eine Lösung von

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v) & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ v_t = \Delta v - v + u & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ \partial_\nu u = 0 = \partial_\nu v & \text{in } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(\cdot,0) = u_0,\ v(\cdot,0) = v_0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

worin $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ und $v_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ nichtnegativ seien.
Zeige: $u \geq 0$, $v \geq 0$ in $\Omega \times (0,T)$.

Hausaufgabe 2:

Betrachte das System

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u(1-v), \\ v_t = \Delta v + \alpha v(u-1), \\ \partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} = 0 = \partial_\nu v\big|_{\partial\Omega}, \\ u(\cdot,0) = u_0, \quad v(\cdot,0) = v_0. \end{cases}$$

a) Gib eine mögliche biologische Interpretation dieses Modells an. Was beschreiben u und v?
Nimm nun an, $\alpha \in (0,\infty)$, Ω sei ein beschränktes glattes Gebiet im $\mathbb{R}^n$, $u_0, v_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ seien positiv in $\overline{\Omega}$ und (u,v) eine zugehörige klassische Lösung.
b) Zeige, dass $u \geq 0$ und $v \geq 0$.
c) Zeige, dass die Lösung global und echt positiv ist.
d) Zeige, dass $S(x,t) := \alpha u(x,t) + v(x,t) - \ln u^\alpha v - \alpha - 1$ nichtnegativ ist und $S_t = \Delta S - [\alpha|\frac{\nabla u}{u}|^2 + |\frac{\nabla v}{v}|^2]$ erfüllt.
e) Weise nach, dass $t \mapsto \sup_{x\in\Omega} S(x,t)$ monoton fällt, und folgere Beschränktheit von u und v.
f) Zeige, dass $\int_0^\infty \int_\Omega (\alpha|\frac{\nabla u}{u}|^2 + |\frac{\nabla v}{v}|^2) < \infty$.
g) Zeige, dass $\int_T^{T+1} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \to 0$ für $T \to \infty$.
h) Leite für $y(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(\cdot,t)|^2 + \frac{1}{2\alpha}\int_\Omega |\nabla v(\cdot,t)|^2$ eine Differentialungleichung der Form $y' \leq Cy$ her.
i) Beweise: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $t_\varepsilon > 0$ so, dass zu jedem $T > t_\varepsilon$ wenigstens ein $t \in (T, T+1)$ mit $y(t) < \varepsilon$ existiert.
j) Zeige weiter, dass $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$.
k) Lässt sich folgern, dass die Lösung gegen einen konstanten Zustand konvergiert?
l) Was bedeutet das nachgewiesene Langzeitverhalten für das beschriebene biologische Szenario?