Michael Winkler
Johannes Lankeit

21. Oktober 2016

1. Übung zur Vorlesung „Evolutionsgleichungen" im WS 2016/17

Präsenzaufgabe 1:
Zeige: Ist $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

mit gegebenem $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, so ist $u(x,t) = u_0(x-t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,\infty)$.

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $\varphi \in C^1((0,\infty)) \cap C^0([0,\infty))$. Gesucht ist je eine stetige Funktion $u\colon [0,\infty)^2$, die in $(0,\infty)^2$ differenzierbar ist und

$$a)\ \begin{cases} u_t + 0u_x = u & \text{in } (0,\infty)^2, \\ u(\cdot,0) = \varphi & \text{in } [0,\infty) \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} u_t + 0u_x = u & \text{in } (0,\infty)^2, \\ u(s,s) = \varphi(s) & \text{für } s \in [0,\infty) \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} u_t + 0u_x = u & \text{in } (0,\infty)^2, \\ u(0,\cdot) = \varphi & \text{in } [0,\infty) \end{cases}$$

erfüllt.
i) Wie verlaufen die Charakteristiken der betrachteten Gleichung?
ii) Welche der gegebenen Probleme sind lösbar?
iii) Was haben i) und ii) miteinander zu tun?

Präsenzaufgabe 3:
Löse mittels der Methode der Charakteristiken (gemäß Algorithmus 1.3):

$$\begin{cases} u_t + 3xu_x = 2 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } [0,\infty), \end{cases}$$

worin $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ gegeben ist.

Präsenzaufgabe 4:
Es seien $A = \{(x,y); x > 0 \text{ und } y > 0\}$ und $u\colon A \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte

$$xu_x + 2yu_y = 0 \qquad \text{für alle } (x,y) \in A.$$

Beweise, dass $u(x,y) = \varphi(\frac{x^2}{y})$, wobei φ eine Funktion einer Variablen ist.

Hausübungen

Abgabe: 28. Oktober 2016, 14:02 Uhr

Wegen §6 (4) Satz 4 der Prüfungsordnung zählen die Hausübungen dieses Blattes noch nicht zum Nachweis qualifizierter Teilnahme gemäß §6 (1) und §6(4), Satz 1 bis 3, der (im Einklang mit §9 (1)) Voraussetzung für die Teilnahme an der Modulabschlussprüfung (Klausur) ist. Für die übrigen Hausübungen gilt: Alle Übungszettel (bis auf zwei) sind abzugeben, insgesamt müssen in den Hausübungen mindestens 15 Punkte erreicht werden.

Hausaufgabe 1:

Finde alle stetig differenzierbaren Funktionen $u\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$xu_x(x,y) = yu_y(x,y), \qquad (x,y) \in (0,\infty)^2,$$

und $u(x,x) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften?

Hausaufgabe 2:

Sei $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Berechne mithilfe der Charakteristikenmethode eine globale Lösung von

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_x + \beta u_y, & (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

zu gegebenen Parametern $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 3:

Sei $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Zeige, dass dann

$$\begin{cases} u_t = \frac{u_x}{t+1} + 1, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

eine globale Lösung besitzt, und bestimme eine solche in expliziter Form.

Hausaufgabe 4:

Melde dich in Paul auch für die Übung zur Vorlesung an (sofern du vorhast, sie jemals zu besuchen).