Michael Winkler
Johannes Lankeit

27. Januar 2017

10. Übung zur Vorlesung „Evolutionsgleichungen“ im WS 2016/17

Präsenzaufgabe 1:
Gegeben seien $m > 1$ und $t_0 := \frac{m-1}{2m(m+1)}$. Betrachte die durch

$$u(x,t) := \begin{cases} \left(\frac{t_0 x^2}{t_0 - t}\right)^{\frac{1}{m-1}}, & x \le 0, t \in [0,t_0), \\ 0, & x \ge 0, t \in [0,t_0) \end{cases}$$

in $\mathbb{R} \times [0,t_0)$ definierte Funktion. Zeige: Sie erfüllt

$$u \in L^m_{loc}(\mathbb{R} \times [0,t_0))$$

und

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}} u\varphi_t - \int_{\mathbb{R}} u_0 \varphi(\cdot,0) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} u^m \Delta\varphi$$

für alle $\varphi \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,t_0))$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R} \times [0,t_0)$.

Präsenzaufgabe 2:
Gegeben sei eine hinreichend glatte Funktion $u\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $u_t \ge -\frac{u}{(m-1)t}$ erfüllt. Zeige, dass für jedes $x \in \Omega$ die Funktion $t \mapsto u(x,t)t^{\frac{1}{m-1}}$ monoton wachsend ist, und folgere, dass die Positivitätsmenge $\{x \in \Omega;\ u(x,t) > 0\}$ bei wachsendem t nicht kleiner wird.

Hausübungen

Abgabe: 3. Februar 2017, 14:10 Uhr

Hausaufgabe 1:

Gegeben seien $p \in (0,1)$, $T > 0$ und das glatte beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zu $\varepsilon > 0$ löse die Funktion $v_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T)) \cap C^\infty(\overline{\Omega} \times (0,T))$ das Problem

$$\begin{cases} v_{\varepsilon t} = v_\varepsilon^p \Delta v_\varepsilon & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ v_\varepsilon(\cdot,t)\big|_{\partial\Omega} = \varepsilon & \text{für alle } t \in (0,T), \\ v_\varepsilon(\cdot,0) = v_0 \end{cases}$$

zu gegebenen nichtnegativen Anfangsdaten $v_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $v_0\big|_{\partial\Omega} = 0$.

a) Definiere $m = \frac{1}{1-p}$ sowie $u_\varepsilon := ((1-p)^{\frac{1}{p}} v_\varepsilon)^{1-p}$ und zeige, dass u_ε die (bzw. ein geeignetes Anfangs-Randwert-Problem zur) Poröse-Medien-Gleichung löst.

b) Setze $z_\varepsilon := \frac{v_{\varepsilon t}}{v_\varepsilon}$ und zeige, dass

$$z_{\varepsilon t} = v_\varepsilon^p \Delta z_\varepsilon + 2 v_\varepsilon^{p-1} \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla z_\varepsilon + p z_\varepsilon^2 \quad \text{in } \Omega \times (0,T).$$

c) Folgere durch Vergleichsargumente in (τ, T) für $\tau > 0$, dass

$$z_\varepsilon(\cdot,t) \geq -\frac{1}{pt} \qquad \text{in } \Omega \times (0,T).$$

d) Folgere die Ungleichung

$$v_\varepsilon^{p-1} \Delta v_\varepsilon \geq -\frac{1}{pt}$$

und leite aus Testen mit v^γ für passendes $\gamma > 0$ die Existenz einer Konstanten $c_{p,\gamma} > 0$ her, mit der

$$-\int_\Omega v_\varepsilon^{p-2+\gamma}(\cdot,t) |\nabla v_\varepsilon(\cdot,t)|^2 \geq -c_{p,\gamma} \cdot \frac{1}{t}$$

für $t \in (0,T)$.

e) Beweise, dass

$$v := \lim_{\varepsilon \searrow 0} v_\varepsilon$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz existiert und dass weiterhin für jedes $t \in (0,T)$

$$\nabla v^{\frac{p+\gamma}{2}}(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$$

existiert.

f) Nimm nun $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}$ an und leite aus der Annahme $v(0,t_0) = 0$ für ein $t_0 \in (0,T)$ eine Abschätzung der Form

$$v(x,t_0) \leq c|x|^{\frac{1}{p+\gamma}}$$

her und übertrage sie auf die entsprechende Lösung u der Poröse-Medien-Gleichung. Vergleiche mit dem Wachstumsverhalten der Barenblattlösungen nahe ihren Nullstellen.