Michael Winkler
Johannes Lankeit

3. Februar 2017

11. Übung zur Vorlesung „Evolutionsgleichungen“ im WS 2016/17

Präsenzaufgabe 1:
Zu $p > 1$ und $0 \le u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ sei $u \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T_{max})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, T_{max}))$ die Lösung von

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

Weise unter der Annahme $\int_\Omega u_0\theta > c := (2\lambda_1)^{\frac{1}{p-1}}$ nach, dass $T_{max} = T_{max}(u_0) \le \frac{2}{p-1}\left(\int_\Omega u_0\theta\right)^{1-p}$. Hierbei sei θ eine Eigenfunktion des Dirichlet-Laplace-Operators $-\Delta$ in Ω zum ersten Eigenwert λ_1, die $\|\theta\|_{L^1(\Omega)} = 1$ erfüllt.

Präsenzaufgabe 2:
Zeige: Für Lösungen u von (1) definiert

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(\cdot, t)|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}$$

eine Funktion $E \in C^0([0, T_{max})) \cap C^1((0, T))$ mit $E'(t) = -\int_\Omega u_t^2$. Falls $E(u_0) < 0$, so ist $T_{max} < \infty$. (Betrachte hierzu $\Psi(t) := \int_\Omega u^2(\cdot, t)$ und zeige eine Ungleichung der Form $\Psi' \ge -2E(u_0) + c\Psi^{\frac{p+1}{2}}$.)

Präsenzaufgabe 3:
Beweise: Es gibt eine glatte Funktion $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $f(u) > 0$ für $u > 0$ derart, dass
i) alle Lösungen von $U' = f(U)$, $U(0) = U_0 > 0$ in endlicher Zeit explodieren,
ii) alle Lösungen von $u_t = \Delta u + f(u), u\big|_{\partial\Omega} = 0, u(\cdot, 0) = u_0$ mit $0 \le u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ in einem beschränkten glatten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ für alle Zeiten $t > 0$ existieren und beschränkt bleiben.
Gehe dazu wie folgt vor:
a) Zeige, dass Lösungen von $U' = f(U)$ genau dann in endlicher Zeit explodieren, wenn $\int^\infty f(u)du < \infty$.
b) Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge mit $a_1 > 1$ und $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$. Dann gibt es eine C^∞-Funktion $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $f(u) > 0$ für $u > 0$ und eine Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ derart, dass

$$a_k < b_k < a_{k+1}, \qquad \int_1^\infty \frac{du}{f(u)} < \infty, \qquad \int_{a_k}^{b_k} \frac{du}{\sqrt{F(b_k) - F(u)}} \ge k$$

für $k \in \mathbb{N}$, worin $F' = f$.
Es sei $g \in C^1([0, \infty); [0, \infty))$ so, dass $g(u) > 0$ für $u > 0$ und $g(u) \ge 1$ für $u > 1$ sowie $\int_1^\infty \frac{ds}{g(s)} < \infty$ und $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine positive Folge mit $\sum_k \beta_k < \infty$, $\beta_k < k^2$, $2\beta_k^2 g(a_k)k^{-2} < a_{k+1} - a_k$. Ferner setzen wir $\gamma_k := 1 - \beta_k k^{-2} > 0$ und $b_k := a_k + \beta_k^2 g(a_k)k^{-2} < a_{k+1}$. Mit später festzulegenden c_k, d_k (mit $a_k < b_k < c_k < a_{k+1}$, $d_k > 0$) setzen wir

$$\widetilde{g}(u) = \begin{cases} d_k + \frac{g(a_k) - d_k}{(b_k - a_k)^{\gamma_k}}(b_k - u)^{\gamma_k}, & a_k \le u \le b_k \\ d_k + \frac{g(c_k) - d_k}{c_k - b_k}(u - b_k), & b_k \le u \le c_k \\ g(u) & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\widetilde{G}(u) = d_k(u - b_k) - \frac{g(a_k) - d_k}{(\gamma_k + 1)(b_k - a_k)^{\gamma_k}}(b_k - u)^{\gamma_k + 1}, \quad u \in [a_k, b_k].$$

Zeige, dass dann $\widetilde{G}' = \widetilde{g}$ in (a_k, b_k) und dass eine hinreichend kleine Wahl von $d_k \in (0, \frac{1}{2})$ bereits $\int_{a_k}^{b_k} \frac{du}{\sqrt{\widetilde{G}(b_k) - \widetilde{G}(u)}} \ge k$ sicherstellt. Zeige weiter, dass $\int_{a_k}^{b_k} \frac{du}{\widetilde{g}(u)} \le \frac{g(a_k)\beta_k}{g(a_k) - d_k} \le 2\beta_k$ und $\int_{b_k}^{c_k} \frac{du}{\widetilde{g}(u)} \le \beta_k$, falls $c_k \in (b_k, a_{k+1})$ nah genug an b_k gewählt ist. Wähle dann eine C^∞-Funktion f, die $\frac{1}{2}\widetilde{g}(u) \le f(u) \le \widetilde{g}(u)$ erfüllt, und zeige, dass sie die in der Aussage geforderten Eigenschaften hat.
c) Es sei f wie in b) und $L > 0$. Für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$ existiert dann eine Lösung von

$$(u_k)_{xx} + f(u_k) = 0, \quad x \in (-L, L), \quad (u_k)_x(0) = 0, \quad u_k(x) \ge a_k, \quad x \in (-L, L) \tag{2}$$

d) Beweise den Satz. Tipp für ii): Verwende eine Oberlösung der Form $\overline{u}(x_1, ..., x_n) = u_k(x_1)$.

Hausübungen

Abgabe: 10. Februar 2017, 14:10 Uhr

Hausaufgabe 1:

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glattes, beschränktes Gebiet, $p > 1$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$ sowie $f'(0) < \lambda_1$. Zeige: Es gibt $\eta > 0$ derart, dass die Lösung u von

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, \end{cases}$$

für alle $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \eta$

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \quad \text{für } t \to \infty$$

erfüllt.
Tipp: Wähle hierzu $\eta > 0$ und $\varepsilon \in (0, \frac{\lambda_1}{2})$ so, dass $|f(s)| \leq (\lambda_1 - 2\varepsilon)|s|$ für $|s| \leq \eta$, finde $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $-\Delta\varphi = (\lambda_1 - \varepsilon)\varphi$, $\varphi \geq 1$ und setze $\overline{u} = \frac{\eta}{\max\varphi} e^{-\varepsilon t}\varphi$.

Hausaufgabe 2:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet, $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f(0) = f'(0) = 0$ sei strikt konvex, und zu $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ bezeichne u die Lösung von

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{N}$ die Mengen der Anfangswerte, die zu globalen, beschränkten bzw. gegen null konvergenten Lösungen führen:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &:= \{u_0 \in C^0(\overline{\Omega});\ T_{max}(u_0) = \infty\} \\ \mathcal{B} &:= \{u_0 \in C^0(\overline{\Omega});\ T_{max}(u_0) = \infty \text{ und } \sup_{t \geq 0} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\} \\ \mathcal{N} &:= \{u_0 \in C^0(\overline{\Omega});\ T_{max}(u_0) = \infty \text{ und } \lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0\}. \end{aligned}$$

Außerdem definieren wir für $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$

$$S(\varphi) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega F(\varphi(x)) \,\mathrm{d}x$$

mit $F(x) := \int_0^x f(s) \,\mathrm{d}s$.

a) Zeige: $\mathcal{N} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.
b) Zeige: $0 \in C^0(\overline{\Omega})$ liegt im Innern von $\mathcal{N}$.
c) Zeige: Die Mengen $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{N}$ sind konvex.
d) Zeige: Falls $u_0 \in \mathcal{B}$ und $v_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ die Ungleichung $v_0 \leq u_0$ erfüllt, so ist auch $v_0 \in \mathcal{B}$.
e) Zeige: $t \mapsto S(u(\cdot,t))$ fällt, falls u eine Lösung ist.
f) Zeige: Für Lösungen u zu $u_0 \in \mathcal{B}$ ist $\{u(\cdot,t);\ t > 1\}$ relativ kompakt in $C^2(\overline{\Omega})$. Lösungen zu Anfangswerten $u_0 \in \mathcal{N}$ erfüllen $u(\cdot,t) \to 0$ in $C^2(\overline{\Omega})$.
g) Zeige: Für $u_0 \in \mathcal{N} \cap C^1(\Omega)$ ist $\mathcal{S}(u_0) \geq 0$.
h) Zeige: Ist $\mathcal{S}(u_0) = 0$ für ein $u_0 \in \mathcal{N} \cap C^1(\Omega)$, so ist $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $-\Delta u_0 = f(u_0)$ und folgere aus Testen mit u_0 und der Ungleichung $xf(x) > 2F(x)$ für $x \neq 0$, dass $u_0 = 0$.
i) Schließe: Ist $0 \not\equiv u_0 \in \mathcal{N} \cap C^1(\overline{\Omega})$, so ist $S(u_0) > 0$.
j) Zeige: Es gibt eine Zahl $a > 0$ derart, dass alle stationären Lösungen $u \not\equiv 0$ bereits $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \geq a$ erfüllen.
k) Beweise: Ist $u_0 \in \mathcal{B}$ und gibt es eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to \infty$ für $n \to \infty$ und $u(\cdot,t_n) \to 0$ in $C^1(\overline{\Omega})$, so gilt $u(\cdot,t) \to 0$ in $C^1(\overline{\Omega})$.