Michael Winkler
Johannes Lankeit

10. Februar 2017

12. Übung zur Vorlesung „Evolutionsgleichungen“ im WS 2016/17

Präsenzaufgabe 1:
Wir betrachten in einem glatt berandeten, beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda_1(\Omega) < 1$ das Problem

$$\begin{cases} u_t = u^{\frac{3}{2}}(\Delta u + u) \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0, \end{cases}$$

worin $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ die Abschätzungen $\alpha\Theta \le u_0 \le \beta\Theta$ mit positiven α, β erfülle. Dabei bezeichne Θ die Eigenfunktion von $-\Delta$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen und Maximum 1.
Man kann zeigen: Es gibt eine eindeutige maximale Existenzzeit $T_{max} \in (0, \infty]$ und eine eindeutige Lösung $u \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T_{max})) \cap C^\infty(\overline{\Omega} \times (0, T_{max}))$.

a) Zeige: Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ gibt es $c > 0$ so, dass $u > c$ in $K \times (0, T_{max})$.

b) Zeige: $T_{max} < \infty$. Tipp: Betrachte $\int_{\Omega'} u^{-\frac{1}{2}}\theta$, wobei θ eine Eigenfunktion von $-\Delta$ auf dem Teilgebiet Ω' von Ω zu einem Eigenwert kleiner als 1 sei.

c) Zeige: Jede Lösung $w \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T]) \cap C^\infty(\Omega \times (0, T))$ für ein $T > 0$ von

$$\begin{cases} w_t = w^{\frac{3}{2}}(\Delta w + w) & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ w\big|_{\partial\Omega} = \varepsilon > 0 \end{cases}$$

erfüllt

$$\frac{w_t(x,t)}{w(x,t)} \ge -\frac{2}{3t} \qquad \text{für } (x,t) \in \Omega \times (0,T).$$

d) Zeige: Für $t \in (0, T)$ ist

$$\int_\Omega u^{-\frac{1}{2}}(\cdot, t)|\nabla u(\cdot, t)|^2 \le 2\int_\Omega \left(u^{\frac{3}{2}}(\cdot, t) + \frac{2}{3t}\right).$$

e) Zeige: Es gibt eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $t_k \to T_{max}$ für $k \to \infty$ derart, dass

$$m(t_k) = \max_{t \in [0, t_k]} m(t),$$

wobei $m(t) := \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}$.

f) Ist $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge wie in e), so gibt es eine Teilfolge $(t_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mu > 0$ und eine messbare Menge $S_0 \subset \Omega$ mit $|S_0| > 0$ und

$$u(x, t_{k_j}) \ge \mu m(t_{k_j}) \qquad \text{für alle } x \in S_0,\ j \in \mathbb{N}.$$

Dazu:

i) Zeige: Die Menge der Funktionen $q_k := \frac{u(\cdot, t_k)}{m(t_k)}$, $k \in \mathbb{N}$, ist beschränkt in $W^{1,2}(\Omega)$.

ii) Zeige: Es gibt eine Funktion $Q\colon \Omega \to \mathbb{R}$ so, dass $q_{k_j} \rightharpoonup Q$ in $W^{1,2}(\Omega)$, $q_{k_j} \to Q$ in $L^r(\Omega)$ für alle $r \in [1, \infty)$ und $q_{k_j} \to Q$ fast überall in Ω für $j \to \infty$.

iii) Zeige, dass $u(x,t) \le v(x,t) := m(t_k)(e(x) + \frac{1}{4})$ für $(x,t) \in \Omega \times (0, t_k)$, wobei $-\Delta e = 1$, $e\big|_{\partial\Omega} = 0$, und folgere, dass $q_k \le e + \frac{1}{4}$ in Ω.

iv) Zeige: Es gibt ein glatt berandetes Teilgebiet $\Omega' \subset \Omega$ mit $q_k < \frac{1}{2}$ in $\Omega \setminus \Omega'$ und eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega'$ mit $q_k(x_k) = 1$.

v) Zeige: Mit einer gewissen Konstante $c > 0$ ist dann für große $k \in \mathbb{N}$

$$-\Delta q_k \le c q_k \qquad \text{in } \Omega'.$$

vi) Es sei nun w_k die Lösung von $-\Delta w_k = c q_k$ in Ω', $w_k\big|_{\partial\Omega'} = 0$. Zeige, dass $q_k \le w_k + \frac{1}{2}$ in Ω'.

vii) Zeige: $Q \not\equiv 0$.

g) Zeige: Das Maß der Menge

$$S_\star := \{x \in \Omega;\ \limsup_{t \nearrow T_{max}} u(x,t) = \infty\}$$

ist positiv.

Hausübungen

Abgabe: 28.02.2017, 9:00 Uhr

Hausaufgabe 1:
Bereite dich auf die Klausur vor. Sie findet am 28.02.2017 ab 9.00 Uhr im Raum E 1.143 statt.