Michael Winkler
Johannes Lankeit

28. Oktober 2016

2. Übung zur Vorlesung „Evolutionsgleichungen“ im WS 2016/17

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}^N$ sowie $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^N)$. Finde eine Lösung zu

$$u_t = a \cdot \nabla u, \qquad u(\cdot, 0) = u_0.$$

Welche „physikalische Bedeutung“ hat a?

Präsenzaufgabe 2:
Betrachte die Burgers-Gleichung $u_t + uu_x = 0$ zu Anfangsdaten

$$a)\ u_0(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} \qquad\qquad b)\ u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x \geq 0. \end{cases}$$

i) Warum erwarten wir nicht, eine klassische Lösung $u \in C^0(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ zu finden?
ii) Skizziere die Charakteristiken etwaiger Lösungen.
iii) Welche Probleme deuten sich dabei an?

Präsenzaufgabe 3:
Es sei $u_L < u_R$. Zeige: Die auf $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ definierte Funktion u mit

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x \leq u_L t, \\ \frac{x}{t}, & u_L t < x < u_R t, \\ u_R, & x \geq u_R t, \end{cases}$$

ist außerhalb der Geraden $\{x = u_L t\}$ und $\{x = u_R t\}$ in $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ stetig und in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ stetig differenzierbar und löst dort die Burgers-Gleichung.
Gibt es eine weitere Funktion, die außerhalb zweier Geraden stetig differenzierbar ist und die Burgers-Gleichung erfüllt und die zudem in $\mathbb{R} \times \{0\}$ mit u übereinstimmt?

Präsenzaufgabe 4:
Es sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ löse

$$u_t + (f(u))_x = 0.$$

Zeige: Die Funktion $v := f'(u)$ löst die Burgers-Gleichung.

Präsenzaufgabe 5:
Betrachtet sei

$$\begin{cases} u_t + u_x = \beta u^2, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$ und $0 < u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Zeige, dass durch die mithilfe der Charakteristikenmethode gewonnene Lösungsformel

$$u(x,t) = \frac{u_0(x-t)}{1 - \beta u_0(x-t) \cdot t}$$

im Fall $\beta \leq 0$ eine globale Lösung definiert wird;
im Fall $\beta > 0$ eine Lösung in $\mathbb{R} \times (0, T)$ mit

$$T := \frac{1}{\beta \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}$$

bestimmt wird, die für $t \nearrow T$ explodiert in dem Sinne, dass

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to \infty \qquad \text{für } t \nearrow T$$

gilt.

Hausübungen

Abgabe: 4. November 2016, 14:02 Uhr

Hausaufgabe 1:

Betrachte das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{$\star$}$$

worin u_0 die durch

$$u_0(x) := \begin{cases} 1, & x \le 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \ge 1, \end{cases}$$

bestimmte stetige, aber nicht stetig differenzierbare Funktion sei.

a) Finde durch formale Rechnung eine „Lösungsformel“ für ($\star$) unter dieser speziellen Anfangsbedingung.

b) Betrachte ($\star$) zu geeigneten Anfangswerten $u_{0\varepsilon} \in C^1(\mathbb{R})$, $\varepsilon \in (0,1)$, die du so konstruierst, dass $u_{0\varepsilon}$ für $\varepsilon \searrow 0$ die Funktion u_0 in passendem Sinne approximiert. Diskutiere das Verhalten der zugehörigen Lösungen u_ε im Grenzfall $\varepsilon \searrow 0$, und rechtfertige damit dein Ergebnis aus a).

Hausaufgabe 2:

Gesucht sind Lösungen des Anfangswertproblems für die *Hamilton-Jacobi-Gleichung*

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_x^2, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{$\star$}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$.

a) Zeige, dass im Fall

$$u_0(x) := Ax^2, \qquad x \in \mathbb{R},$$

mit $A \in \mathbb{R}$ durch

$$u(x,t) := \frac{Ax^2}{1 - 4\alpha At}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T),$$

eine Lösung von ($\star$) definiert wird, worin

$$T := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \alpha A \le 0, \\ \frac{1}{4\alpha A}, & \text{falls } \alpha A > 0. \end{cases}$$

Wie verhält sich $u(x,t)$ für $t \searrow T$?

b) Zeige: Gehört u_0 zu $C^2(\mathbb{R})$ und gibt es $M > 0$ mit

$$u_{0xx}(x) \begin{cases} \le M & \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \quad \text{falls } \alpha > 0, \\ \ge -M & \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \quad \text{falls } \alpha \le 0, \end{cases} \tag{$\star\star$}$$

so definiert

$$u\Big(x_0 - 2\alpha u_{0x}(x_0) \cdot t, t\Big) = u_0(x_0) - \alpha u_{0x}^2(x_0) \cdot t$$

implizit eine Lösung von ($\star$) in $\mathbb{R} \times (0,T)$ mit

$$T := \frac{1}{2|\alpha|M}.$$

c) Beweise: Erfüllt $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ die Bedingung ($\star\star$) für ein $M > 0$ und ist überdies $u_{0x} \ge 0$ auf $\mathbb{R}$, so gilt $u_x \ge 0$ in $\mathbb{R} \times (0,T)$ mit T wie in b).