Michael Winkler
Johannes Lankeit

11. November 2016

4. Übung zur Vorlesung „Evolutionsgleichungen“ im WS 2016/17

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet sowie $x_0 \in \Omega$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ definieren wir

$$\delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0).$$

Zeige: δ_{x_0} ist eine Distribution (aus $\mathcal{D}'(\Omega)$).
Diese Distribution heißt auch „Dirac'sche Delta-Distribution“. Falls $x_0 = 0$, schreibt man oft auch nur δ. Berechne für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ auch $D^\alpha \delta$.

Präsenzaufgabe 2:

a) Zeige: Für $\Omega = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}$ und $u(x) := |x|$ gilt

$$u_x(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

im distributionellen Sinn.

b) Zeige: Für $\Omega := \mathbb{R}$ und

$$u(x) := H(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

gilt $u_x = \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Präsenzaufgabe 3:
Untersuche die durch $u_n(x) := \sqrt{n} e^{-nx}$ sowie die durch $v_n(x) = ne^{-2nx}$ definierte Funktionenfolgen in $L^2((0,1))$ auf Beschränktheit, punktweise Konvergenz, Konvergenz im Sinne der Norm und schwache Konvergenz.

Präsenzaufgabe 4:
Für welche $\alpha > 0$ definiert die durch $u(x) = x^{-\alpha}$, $x > 0$, und $u(x) = 0$, $x \leq 0$, gegebene Funktion eine Distribution aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$?

Präsenzaufgabe 5:
Seien $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ und

$$u_k(x) := \begin{cases} \sqrt{k}, & \text{falls } x \in (0, \frac{1}{k}) \\ 0, & \text{falls } x \in [\frac{1}{k}, 1), \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Zeige:

i) Für jedes $p \in [1,2)$ gilt $u_k \to 0$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to \infty$.
ii) Für jedes $p \in [1,2]$ gilt $u_k \rightharpoonup 0$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to \infty$.
iii) Für $p > 2$ ist $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nicht schwach konvergent in $L^p(\Omega)$.

Präsenzaufgabe 6:
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1, \infty)$ und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ sowie $u \in L^p(\Omega)$ und $v \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Gelten dann

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad \text{und} \quad u_k \to v \text{ f.ü. in } \Omega \qquad \text{für } k \to \infty,$$

so folgt $u = v$ (f.ü. in Ω).

Präsenzaufgabe 7:
Beweise oder widerlege: „Schwache Konvergenz (in L^2) impliziert punktweise Konvergenz“, „punktweise Konvergenz impliziert schwache Konvergenz (in L^2)“.

Es sei $u_n \rightharpoonup u$ und $v_n \rightharpoonup v$ in $L^2(\Omega)$. Beweise oder widerlege: $\langle u_n, v_n\rangle := \int_\Omega u_n v_n \to \langle u, v\rangle$.

Präsenzaufgabe 8:
Es seien $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega, X)$ lokal gleich, d.h. es gebe zu jedem $x \in \Omega$ eine Umgebung $U(x)$ derart, dass $T_1(\varphi) = T_2(\varphi)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(U)$. Zeige, dass dann bereits $T_1 = T_2$ in $\mathcal{D}'$.

Hausübungen

Abgabe: 18. November 2016, 14:02 Uhr

Hausaufgabe 1:
Beweise die folgende Teilaussage von Def./Prop. 1.1: Ist $T \in \mathcal{D}'(\Omega, X)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, so ist $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega, X)$.

Hausaufgabe 2:
Welche der folgenden Abbildungen $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definieren eine Distribution aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$?

a) $T(\varphi) := \varphi(1) - \varphi(0)$

b) $(\varphi) := \int_0^1 x\varphi(x)dx$

c) $T(\varphi) := \varphi(1) \cdot \varphi(2)$

d) $T(\varphi) := \sum_{k=1}^\infty \varphi^{(k)}(k)$

e) $T(\varphi) := \sum_{k=1}^\infty \varphi^{(k)}(0)$

f) $T(\varphi) := \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx$

Hausaufgabe 3:
Es sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ 1, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

Bestimme die distributionellen Ableitungen u_x und u_y.

Hausaufgabe 4:
Bearbeite Aufgabenteil a), falls du ihn noch nicht aus einer früheren Veranstaltung kennst. Falls du ihn schon (und noch) kennst, bearbeite stattdessen Teil b):

a) Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $u_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$i.)\ u_n(x) = \sin(n\pi x), \quad ii.)\ u_n(x) = \sin(n/x), \quad iii.)\ u_n(x) = \sin(1/nx).$$

Untersuche die vorgelegten Funktionenfolgen auf schwache Konvergenz in $L^2(0,1)$.

b) Es sei $p \in (1, \infty)$. Zeige: Für $f \in L^p((0,1))$ sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p((0,1))$ gilt genau dann $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p((0,1))$, wenn die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p((0,1))$ beschränkt ist und für alle $x \in (0,1)$ gilt, dass $\int_0^x f_n(t)dt \to \int_0^x f(t)dt$ für $n \to \infty$.

Hausaufgabe 5:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, X ein Banachraum und $T\colon C_0^\infty(\Omega) \to X$ eine Abbildung. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) $T \in \mathcal{D}'(\Omega, X)$,

b) T ist linear und für alle Kompakta $K \subset \Omega$ existieren $k \in \mathbb{N}$ und $C > 0$, sodass

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega): \qquad \|T\varphi\|_X \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

c) T ist linear und stetig in dem Sinne, dass aus $\varphi_n \to \varphi$ bereits $T\varphi_n \to T\varphi$ folgt, wenn wir die Konvergenz einer Folge aus $\mathcal{D}(\Omega)$ wie folgt definieren: $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, wenn es eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ gibt, sodass $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt, dass $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ für $n \to \infty$ gleichmäßig in Ω.