Michael Winkler
Johannes Lankeit

18. November 2016

5. Übung zur Vorlesung „Evolutionsgleichungen" im WS 2016/17

Präsenzaufgabe 1:
Gegeben sei

$$[u(t)](x) = \begin{cases} \sin x, & t \in [0,1], x \in (0,\pi), \\ \cos x, & t \in (1,2], x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Gehört u zu $L^1((0,2); L^2((0,\pi)))$? Was ist $\int_0^2 u(t)dt$?

Präsenzaufgabe 2:
Führe den Beweis für alle Aussagen in Bsp. 3.3:
Seien $\Omega := (0,1) \subset \mathbb{R}$, $T > 0$, $\gamma \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ und $u\colon \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x,t) := (x^2 + t)^{-\gamma}, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T).$$

Für $t \in (0,T)$ sei ferner $\widetilde{u} \in L^1(\Omega)$ gegeben durch

$$(\widetilde{u}(t))(x) := u(x,t), \quad x \in \Omega.$$

Dann gilt $\widetilde{u} \in L^p((0,T); L^1(\Omega))$ für alle $p \in [1, \frac{1}{\gamma - \frac{1}{2}})$.

Präsenzaufgabe 3:
Es seien $T > 0$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Nutze die Grönwallsche Ungleichung, um zu zeigen, dass Lösungen von

$$u' = f(u), t \in (0,T), \qquad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n$$

stetig vom Anfangswert u_0 abhängen.

Präsenzaufgabe 4:
Sind X ein separabler BR mit separablem Dual X^*, $p > 1$, $f \in L^p((0,T); X^*)$, $g \in L^q((0,T); X)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gehört $t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$ zu $L^1((0,T))$ und

$$\int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle dt \leq \|f\|_{L^p((0,T),X^*)} \|g\|_{L^q((0,T),X)}.$$

Präsenzaufgabe 5:
Es sei X ein Banachraum und $u\colon [0,1] \to X$ stetig sowie $p \in [1,\infty)$.
Gehört u zu $L^p((0,1); X)$? Zu $B^p((0,1); X)$?

Präsenzaufgabe 6:
Zeige: Zu $c_1, c_2, T > 0$ gibt es $M = M(c_1, c_2, T)$ derart, dass jede Funktion $f \in L^\infty((0,T))$, die

$$f(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} f(s) ds$$

erfüllt, bereits der Abschätzung $f \leq M(c_1, c_2, T)$ in $(0,T)$ genügt.

Hausübungen

Abgabe: 25. November 2016, 14:10 Uhr

Hausaufgabe 1:

Es sei für $\Omega = B_1 \subset \mathbb{R}^n$

$$u(x,t) := \frac{1}{|x|^t}, \qquad x \in \Omega \setminus \{0\},\ t > 0.$$

Für welche $a > 0$, $p \in [1,\infty)$, $q \in [1,\infty)$ gilt

$$u \in L^p((0,a); L^q(\Omega))?$$

Hausaufgabe 2:

a) Es sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ nichtfallend und lokal Lipschitz-stetig sowie $y_0 \in \mathbb{R}$. Es bezeichne y die Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = y_0$, $y'(t) = f(y(t))$ auf einem Intervall $(0,T)$ und wir nehmen an, dass die stetige Funktion $z\colon [0,T) \to \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$z(t) \le z(0) + \int_0^t f(z(\tau))d\tau \quad \text{für alle } t \in (0,T), \qquad z(0) < y_0,$$

erfüllt. Zeige, dass dann $z(t) \le y(t)$ für alle $t \in (0,T)$.

b) Kann man auf die Bedingung „f nichtfallend“ verzichten?

Hausaufgabe 3:

Formuliere und beweise eine Entsprechung des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz für Folgen von Funktionen mit Werten in einem separablen Banachraum.

Hausaufgabe 4:

a) Es sei X ein Banachraum und $u\colon [0,1] \to X$ eine Funktion. Zeige: Wenn u stark messbar ist, so ist u „fast separabelwertig“, d.h. es gibt eine Nullmenge $N \subset [0,1]$ so, dass $u([0,1] \setminus N)$ separabel ist.

b) Zeige: Nicht jede Funktion $u \in L^\infty((0,1) \times (0,1))$ ist, betrachtet als Funktion $u\colon (0,1) \to L^\infty((0,1))$ stark messbar. (Tipp: Betrachte $u(t) := \chi_{(0,t)}$.)