Michael Winkler
Johannes Lankeit

25. November 2016

6. Übung zur Vorlesung „Evolutionsgleichungen“ im WS 2016/17

Präsenzaufgabe 1:
Halte Übungsblatt 5 bereit. Es gibt da noch Gesprächsbedarf.

Präsenzaufgabe 2:
Es sei hier (und in allen weiteren Aufgaben) $T > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand.
Definiere: Was ist eine schwache Lösung für das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 & \text{in } (0,T), \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

der Wärmeleitungsgleichung?

Präsenzaufgabe 3:
Bestimme die Galerkin-Näherungslösungen u_N (mit V_N wie in Lemma 1.1.3) für $-\Delta u = f$ in Ω, $u\big|_{\partial\Omega} = 0$, zu gegebenem $f \in L^2(\Omega)$. Findest du eine Funktion u als Grenzwert (in geeignetem Sinne) der Folge der u_N?

Hausübungen

Abgabe: 2. Dezember 2016, 14:10 Uhr

Hausaufgabe 1:
Eine Funktionenfolge erfülle $u_n \rightharpoonup u$ in $L^2((0,T); W_0^{1,2}(\Omega))$ und $\partial_t u_n \rightharpoonup z$ in $L^2((0,T); (W_0^{1,2}(\Omega))^*)$.
Zeige: Dann gilt $u_t = z$ und es ist $u_t \in L^2((0,T); (W_0^{1,2}(\Omega))^*)$.

Hausaufgabe 2:
In (IV.1.1.)(3) seien a, b, d, f so gewählt, dass wir das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 & \text{in } (0,T), \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

der Wärmeleitungsgleichung erhalten; es sei $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und für $N \in \mathbb{N}$ sei u_N die in Lemma 1.1.3 konstruierte zugehörige Funktion.

a) Zeige, dass für jedes $\psi \in C^1([0,T]; V_N)$ gilt:

$$\int_\Omega u_N(\cdot,T)\psi(\cdot,T) - \int_\Omega u_0\psi(\cdot,0) - \int_0^T \int_\Omega u_N \psi_t = -\int_0^T \int_\Omega \nabla u_N \cdot \nabla \psi.$$

b) Zeige, dass $\Delta u_N \in C^1([0,T]; V_N)$, dass wir also hierin $\psi = \Delta u_N$ wählen dürfen.

c) Finde $C > 0$, sodass

$$\forall N \in \mathbb{N}: \qquad \int_0^T \int_\Omega |\Delta u_N|^2 \le C.$$

d) Folgere, dass die in Satz 1.1.5 konstruierte Lösung (im Fall der Wärmeleitungsgleichung) zusätzlich

$$\Delta u \in L^2((0,T); L^2(\Omega))$$

erfüllt.