Michael Winkler
Johannes Lankeit

16. Dezember 2016

7. Übung zur Vorlesung „Evolutionsgleichungen“ im WS 2016/17

Präsenzaufgabe 1:
Betrachte zu einer glatten beschränkten Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und mit $0 \le u_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ das Problem

$$\begin{cases} u_t = (1+u)\Delta u + |\nabla u|^2 + f(u), \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(\cdot,0) = u_0. \end{cases}$$

a) Zeige: Es gibt eine Lösung $u \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,\infty))$.
b) Zeige weiter: Diese ist nichtnegativ, sofern $f(0) \ge 0$.
c) Wir nehmen nun an, dass $f > 0$ auf $(-\infty, 0)$ und $f < 0$ auf $(0,\infty)$. Was lässt sich über das Langzeitverhalten von u sagen?

Präsenzaufgabe 2:
Zeige: Zu $M > 0$, $B > 0$ gibt es $C(M,B) > 0$ mit der Eigenschaft, dass jede Lösung von

$$u_t = u\Delta u + f(t)u, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = \varepsilon, \qquad u(\cdot,0) = u_0$$

für $\varepsilon > 0$ und alle glatten Funktionen $u_0\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\varepsilon < u_0 < M$ und $0 \le f \le B$ die Abschätzung

$$0 \le u(x,t) \le C(M,B), \qquad x \in \Omega, t > 0,$$

erfüllt.
Tipp: $z(t)(M + \Phi(x))$, worin $-\Delta\Phi = 1$.

Hausübungen

Abgabe: 13. Januar 2017, 14:10 Uhr

Hausaufgabe 1:

Es sei u eine klassische (nichtnegative) Lösung von

$$u_t = \Delta u + u^p, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad u(\cdot,0) = u_0$$

zu $u_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ und mit einem $p > 1$.

Beweise: Falls u nicht global ist, d.h. falls es $T_{max} \in (0,\infty)$ gibt mit $u \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T_{max})) \cap C^{2,1}(\Omega \times (0,T_{max}))$ und $\limsup_{t\nearrow T_{max}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$, dann ist

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p-1}}}(T_{max}-t)^{-\frac{1}{p-1}} \qquad \text{für alle } t \in (0,T_{max}).$$

Beobachte dazu zunächst, dass $y' = y^p$, $y(0) = ((p-1)T_{max})^{-\frac{1}{p-1}}$, in $(0,T_{max})$ von $y(t) = ((p-1)(T_{max}-t))^{-\frac{1}{p-1}}$ gelöst wird, und führe dann die Annahme, es gäbe t_0 mit $\|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} < y(t_0)$ durch ein Vergleichsargument zum Widerspruch.

Hausaufgabe 2:

Führe den Beweis zu Bsp. 1.1.9: Sei $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k e_k$ mit $\alpha_k = \int_\Omega u_0 e_k$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist für jedes $T > 0$ die schwache Lösung des Dirichlet-Problems für die WLG

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

gegeben durch die gemäß

$$u(\cdot,t) := \sum_{k=1}^\infty \alpha_k e^{-\lambda_k t} e_k, \qquad t > 0,$$

def. Fkt. $u \in \bigcap_{T>0} \Big(L^2((0,T);W_0^{1,2}(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))\Big)$. Für diese Lösung gibt es $C > 0$ mit

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{-\lambda_1 t} \qquad \forall t > 0.$$

Hausaufgabe 3:

Beweise Satz 1.3.4: Seien $T \in (0,\infty]$ und $a \in C^2(\overline{\Omega}\times[0,T)\times\mathbb{R})$, $b \in C^1(\overline{\Omega}\times[0,T)\times\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ und $f \in C^1(\overline{\Omega}\times[0,T)\times\mathbb{R})$ mit $\inf_{\overline{\Omega}\times(0,T)\times\mathbb{R}} a > 0$ sowie $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$. Dann existiert $T_{max} \in (0,T]$ und mindestens eine KL $u \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T_{max})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [0,T_{max}))$ von (45), für welche die Alternative

$$\text{entweder } T = T_{max} \text{ („}u\text{ ist global“)}$$
$$\text{oder } \limsup_{t\nearrow T_{max}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty \text{ („}u\text{ explodiert“)}$$

gilt.

Tipp: Betrachte $\partial_t u_k = \nabla\cdot(a_k(x,t,u_k)\nabla u_k) + \ldots$, $u_k\big|_{\partial\Omega} = 0$, $u_k|_{t=0} = u_0$, mit $a_k(x,t,u) := \zeta_k(u)a(x,t,u)$, $(x,t,u) \in \overline{\Omega}\times[0,T)\times\mathbb{R}$ (und entsprechenden b_k und f_k), worin $\zeta_k \equiv 1$ in $[-k,k]$, $\zeta_k \equiv 0$ in $\mathbb{R}\setminus[-k-1,k+1]$ und $0 \leq \zeta_k \leq 1$, $\zeta_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ sei. Setze

$$T_k := \sup\{\widetilde{T} > 0; |u_k| < k \quad \text{in } \overline{\Omega}\times[0,\widetilde{T}]\},$$

zeige $0 < T_k < T_{k+1} \leq T$, setze $T_{max} := \lim_{k\to\infty} T_k$ und unterscheide zwischen den Fällen $T_{max} = T$ und $T_{max} < T$.