Michael Winkler
Johannes Lankeit

13. Januar 2017

8. Übung zur Vorlesung „Evolutionsgleichungen“ im WS 2016/17

Präsenzaufgabe 1:
Beweise Lemma 2.2: Seien $R > 0$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$, und es sei $u_0 \in C^0(\overline{B_R})$ radialsymmetrisch mit $u_0\big|_{\partial B_R} = 0$. Ist dann $u \in C^0(\overline{B}_R \times [0,T)) \cap C^{2,1}(B_R \times (0,T))$ eine klassische Lösung von

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + g(u) & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u\big|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

für ein $T > 0$, so ist auch $u(\cdot,t)$ radialsymmetrisch für jedes $t \in (0,T)$.
Tipp: Verwende Eindeutigkeit und zeige, dass mit u auch $(x,t) \mapsto u(Ax,t)$ für jede Drehmatrix $A \in SO(n)$ eine Lösung von (1) ist.

Präsenzaufgabe 2:
Zeige:

a) Im glatt berandeten, beschränkten, konvexen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat das Problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + 1, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(\cdot,0) = 0 \end{cases}$$

genau eine globale klassische Lösung $u \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,\infty))$.

b) Diese ist beschränkt...
c) ... und nichtnegativ.
d) Falls $\Omega = B_R$ für ein $R > 0$, ist $u(\cdot,t)$ radialsymmetrisch für jedes $t > 0$.
e) Es gilt (auch für $\Omega \neq B_R$), dass $u > 0$ in $\Omega \times (0,\infty)$.
f) Wenn wir irgendein $t_0 > 0$ wählen, ist $\sup_{\partial\Omega} \partial_\nu u(\cdot,t_0) < 0$.
g) $u(\cdot,t)$ konvergiert gleichmäßig für $t \to \infty$. (Wogegen?)
(Anm: Das erfordert keinen Rückgriff auf die direkt vorhergehenden Teilaussagen.)

Präsenzaufgabe 3:
Es sei u eine Lösung des Dirichlet-Problems der Wärmeleitungsgleichung in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zu nichtnegativen stetigen Anfangsdaten. Zeige: Für alle $t > 0$ ist

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \|u_0\|_{L^1(\Omega)}.$$

Hausübungen

Abgabe: 20. Januar 2017, 14:10 Uhr

Hausaufgabe 1:
Beweise Lemma 2.8: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $x_\star \in \Omega$. Dann gibt es $R_\star > 0$ und $L_\star > 0$ mit der Eigenschaft, dass zu jedem $x^\star \in \overline{\Omega}$ und jedem $R_0 \in (0,R_\star)$ ein stückweise glatter Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$\gamma(0) = x_\star, \qquad B_{3R_0}(\gamma(s)) \subset \Omega \ \forall s \in [0,1], \qquad x^\star \in \overline{B}_{3R_0}(\gamma(1)) \quad \text{und} \quad \int_0^1 |\dot{\gamma}(s)| \, \mathrm{d}s \le L_\star.$$

Hausaufgabe 2:

Beweise: Sind $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $T > 0$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f(0) \geq 0$ und $u \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,T))$ mit

$$\begin{cases} u_t \geq u_{xx} + f(u) & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u\big|_{\partial\Omega}(\cdot,t) \geq 0 & \text{auf } (0,T), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

so folgt aus $0 \not\equiv u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ und $u_0 \geq 0$ bereits, dass es zu jedem $t > 0$ ein $c(t) > 0$ mit

$$u(x,t) \geq c(t)\,\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) \qquad \forall x \in \Omega$$

gibt. Insbesondere ist dann u positiv in $\Omega \times (0,T)$.
Eine mögliche Vorbereitung ist, das folgende Lemma zu beweisen (das implizit auch im Beweis von Lemma 2.5 verwendet wurde): Ist $\Omega = (-d,d)$ für ein $d > 0$ und $w \in C^1(\overline{\Omega})$ eine Funktion mit $w(\pm d) = 0$, $w(x) > 0$ für $x \in \Omega$ und $\pm w_x(\pm d) < 0$, so gibt es $c > 0$ derart, dass $w(x) \geq c \cdot \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$ für alle $x \in \Omega$.

Hausaufgabe 3:

Für $\Omega = (0,L)$ mit einem $L > 0$ betrachten wir in dieser Aufgabe das Problem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}, & \text{in } (0,L) \times (0,T_{max}), \\ u(0,\cdot) = u(L,\cdot) = 0, & \text{in } (0,T_{max}), \\ u(\cdot,0) = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

a) Zeige: Das Problem hat eine Lösung $u \in C^{1,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega} \times [0,T_{max})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,T_{max}))$ für ein $T_{max} \in (0,\infty]$ mit

$$T_{max} = \infty \qquad \text{oder } \limsup_{t \nearrow T_{max}} \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x,t) = 1$$

und zu jedem $T \in (0,T_{max})$ gibt es sogar $\alpha \in (0,1)$ mit $u \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\Omega} \times [0,T)) \cap C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega} \times (0,T))$.

b) Nimm an, dass $L > 2\sqrt{2}$. Weise nach, dass in diesem Fall T_{max} endlich ist. Tipp: Für $w_t = w_{xx} + 1$, $w\big|_{\partial\Omega} = 0$, $w(\cdot,0) = 0$ bestimme $\lim_{t\to\infty} w(\cdot,t)$ explizit und vergleiche geeignet.

c) Zeige: Für jedes $t \in (0,T_{max})$ nimmt $u(\cdot,t)$ in $x = \frac{L}{2}$ ein Maximum an. Wende dazu Vergleichsargumente auf die Funktion $v := u_x$ an, um ihre Positivität im Intervall $(0,\frac{L}{2})$ nachzuweisen. Ignoriere dabei zunächst, dass v nach unserem bisherigen Wissenststand gar nicht glatt genug für Vergleichssatzanwendungen zu sein braucht.

d) Rechtfertige nun die in c) zusätzlich angenommene Regularität von v. (Tipp: Orientiere dich am Beweis von Lemma 2.4.)

e) Folgere schließlich: Ist $L > 2\sqrt{2}$, so ist $T_{max} < \infty$ und $\limsup_{t \nearrow T_{max}} u(\frac{L}{2},t) = 1$.