

9. Übung zur Vorlesung „Evolutionsgleichungen“ im WS 2016/17

Präsenzaufgabe 1:

Es seien $\alpha = \frac{n}{2+(m-1)n}$ und $\beta = \frac{1}{2+(m-1)n}$ sowie $B = \frac{(m-1)\alpha}{2nm}$ und ferner seien $A > 0$, $\tau > 0$ und $x_0 \in \Omega$ derart, dass $\overline{B} \sqrt{\frac{A}{B}} \tau^\beta (x_0) \subset \Omega$ gilt. Wir wollen zeigen: Mit

$$T_0 := \max\{t > 0; B \sqrt{\frac{A}{B}} (t+\tau)^\beta (x_0) \subset \Omega\}$$

und

$$u_0(x) = u_0^{(A,\tau)}(x) := \tau^{-\alpha} \left(A - B \cdot \frac{|x - x_0|^2}{\tau^{2\beta}} \right)_+^{\frac{1}{m-1}}, \quad x \in \overline{\Omega},$$

definiert dann

$$u(x, t) = u^{A,\tau}(x, t) := (t + \tau)^{-\alpha} \left(A - B \cdot \frac{|x - x_0|^2}{(t + \tau)^{2\beta}} \right)_+^{\frac{1}{m-1}} \quad \text{für alle } t \in [0, T_0) \text{ und fast alle } x \in \Omega$$

eine schwache Lösung u von (2).

Beweise zunächst Behauptung 1: $U := u^{(A,\tau)}$ ist eine klassische Lösung von $U_t = \Delta U^m$ in

$$G := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty); |x - x_0|^2 < \frac{A}{B} \cdot (t + \tau)^{2\beta}\}.$$

Nimm dazu o.B.d.A. $x_0 = 0$ an und stelle U in G in „selbstähnlicher Form“

$$U(x, t) = (t + \tau)^{-\alpha} f(|x|t^{-\beta})$$

mit

$$f(\xi) = (A - B\xi^2)^{\frac{1}{m-1}}, \quad \xi \geq 0$$

dar. Rechne nach, dass $U_t = \Delta U^m$ in $0 < \xi = \xi(x, t) < \xi_0 := \sqrt{\frac{A}{B}}$ äquivalent zur Differentialgleichung

$$(f^m)_{\xi\xi} + \frac{n-1}{\xi} (f^m)_\xi + \alpha f + \beta \xi f_\xi = 0 \quad (1)$$

im betrachteten Intervall ist. Weise schließlich anhand der Definitionen von f , α , β , B die Gültigkeit von (1) nach und folgere Behauptung 1.

Beweise dann Behauptung 2: Damit gilt die oben angekündigte Aussage.

Hausübungen

Abgabe: 27. Januar 2017, 14:10 Uhr

Hausaufgabe 1:

Beweise Proposition 3.4: Ist u eine sehr schwache Lösung von

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, \end{cases} \quad (2)$$

die zudem

$$u \in C^0([0, T]; L^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega \times (0, T))$$

erfüllt, so ist u eine schwache Lösung von (2).