Michael Winkler
Johannes Lankeit

17.6.2014

10. Übung zur Funktionentheorie im SS 2014

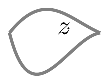
Präsenzaufgabe 1:
Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und es gebe $M \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{Re}f(z) \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Zeige: f ist konstant.
Gilt auch für beliebig oft differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dass aus der Existenz von $M \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

folgt, dass f konstant ist?

Präsenzaufgabe 2:

Die holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nehme in jedem Punkt der im Folgenden als graue Linie eingezeichneten Menge den Wert 42 an. Auch z sei so, wie aus der Zeichnung hervorgeht. Bestimme $f(z)$. Verwende dieses Mal Satz 6.3 anstelle des Arguments von letzter Woche.



Präsenzaufgabe 3:
$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und von der Nullfunktion verschieden und $K \subset \mathbb{C}$ sei kompakt. Zeige:
f hat nur endlich viele Nullstellen in K. Folgere, dass f höchstens abzählbar viele Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat.

Präsenzaufgabe 4:
Gegeben sei die ganze Funktion f mit der Eigenschaft $|f(z)| \leq |\frac{1}{z}|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Bestimme $f(42)$ sowie $f(42i)$.

Präsenzaufgabe 5:
Finde alle holomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

a) $f(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $f(\frac{1}{n}) = \frac{2}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Gibt es eine von der Nullfunktion verschiedene

c) holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

d) beliebig oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

Hausübungen

Abgabe: 24.6.2014, 5:55 Uhr

Hausaufgabe 1: 3 Punkte
Es sei f eine nichtkonstante ganze Funktion und $w \in \mathbb{C}$.
Zeige: Es gibt eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ derart, dass $f(z_n) \to w$.

Hausaufgabe 2: 2 Punkte

Gib entweder (mit Nachweis dieser Eigenschaften) eine holomorphe, surjektive Funktion $f\colon \mathbb{C} \to B_1(0)$ an oder belege die Nichtexistenz.

Hausaufgabe 3: 2+2+2 Punkte

Finde jeweils alle holomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die für alle $n \in \mathbb{N}$ Folgendes erfüllen:

$$a)\ f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}, \qquad b)\ f^{(n)}(0) = (n!)^3, \qquad c)\ f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}.$$

(Oder, falls es solche Funktionen nicht gibt, begründe dies.)

Hausaufgabe 4: 1+3+3 Punkte

Sei G ein sternförmiges Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ohne Nullstelle. Beweise:

a) Dann ist auch $\frac{f'}{f}$ holomorph.

b) Es existiert eine holomorphe Funktion $h\colon G \to \mathbb{C}$, sodass für alle $z \in G$ gilt $e^{h(z)} = f(z)$.

(Diese Aussage haben wir in Hausaufgabe 6 auf Blatt 6 schon verwendet.)

Bestimme nun alle ganzen Funktionen f, g mit

$$f^2 + g^2 = 1.$$

Zeige dazu zunächst, dass $f + ig = e^{ih}$ mit einer ganzen Funktion h ist.

Hausaufgabe 5: 2+4 Punkte

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \{0, \dots, n\}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$. Berechne $\int_{\partial B_2(i)} \frac{f(\xi)}{\xi^m}\, d\xi$ für jedes $m \in \mathbb{N}$.

(b) Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $R, M > 0$ existieren mit $\left|\int_{\partial B_R(z)} \frac{\cos(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\, d\xi\right| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus B_{2R}(0)$?

Hausaufgabe 6: 7 Punkte

Beweise:
Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Gibt es dann ein $z_0 \in G$ mit

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| =: M \qquad \forall z \in G,$$

so ist f konstant.
Zeige dazu zunächst $|f| \equiv const$ in G, indem du
a) für die Menge

$$A := \{z \in G;\ |f(z)| = |f(z_0)| = M\}$$

mit Hilfe der Mittelwertformel in 5.12 nachweist, dass sie offen ist, und
b) feststellst, dass auch $G \setminus A$ offen ist.
(Vergiss nicht, auch zu argumentieren, wie $|f| \equiv const$ aus a) und b) folgt.)
Zeige nun $f' \equiv 0$ in G.
Dazu folgere aus dem bisher Gezeigten für geeignete Funktionen $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dass $u^2 + v^2 = const.$ und schließe durch Ableiten „nach x und y“ und gegebenenfalls unter reichlicher Zuhilfenahme des zweiten Kapitels, dass

$$f'\overline{f} \equiv 0$$

in G ist.
Weise abschließend sowohl im Fall $|f(z_0)| = 0$ als auch für $|f(z_0)| > 0$ die Behauptung nach.