Michael Winkler
Johannes Lankeit

24.6.2014

11. Übung zur Funktionentheorie im SS 2014

Präsenzaufgabe 1:
Bestimme jeweils das Maximum von $|f|$ auf $\overline{B_1(0)}$. Wo wird es angenommen?

a) $f(z) = e^{z^2}$.

b) $f(z) = 3 - |z|^2$.

Welches der beiden Ergebnisse scheint zunächst dem Maximumprinzip zu widersprechen? Warum handelt es sich doch nicht um einen Widerspruch dazu?

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $f\colon B_1(0) \to B_1(0)$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$.
Zeige: Dann gilt $|f'(0)| \leq 1$, $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in B_1(0)$.
Zeige: Gilt außerdem $f'(0) = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ an einer Stelle $z_0 \in B_1(0)$, so ist $f(z) = \lambda z$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$.

Präsenzaufgabe 3:
Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ holomorpher Funktionen auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ konvergiere kompakt gegen $f\colon G \to \mathbb{C}$. Zeige: f ist holomorph.
(Nutze dazu den **Satz von Morera**: Ist $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf dem Gebiet U und gilt für jedes Dreieck Δ mit $\overline{\Delta} \subset U$, dass $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$, so ist f holomorph.)
Zeige weiter: Für $k \in \mathbb{N}$ konvergiert auch die Folge der k-ten Ableitungen $f_n^{(k)}$ kompakt gegen $f^{(k)}$.

Präsenzaufgabe 4:
Es sei $f(z) = \frac{\sin(z)}{z-1-i}$. Bestimme den Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$.

Hausübungen

Abgabe: 1.7.2014, 5:55 Uhr

Hausaufgabe 1: 3 Punkte

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf G holomorph sei. Es konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf ∂G gleichmäßig.
Zeige: f_n konvergiert auf ganz $\overline{G}$ gleichmäßig gegen eine stetige, auf G holomorphe Funktion.

Tipp: Cauchyfolge.

Hausaufgabe 2: 4+8 Punkte

Auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sei die lokal beschränkte Familie (:= Menge) $\mathcal{F} \subset H(G)$ holomorpher Funktionen gegeben. „Lokal beschränkt“ bedeutet dabei, dass es zu jedem Punkt in G eine Umgebung gibt, auf der die Funktionen aus $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt sind, in Zeichen:

$$\forall\, z_0 \in G\ \exists\, C > 0\ \exists\, r > 0\ \forall\, z \in B_r(z_0)\ \forall\, f \in \mathcal{F} \qquad |f(z)| \leq C.$$

Zeige: Zu jedem Punkt $z_0 \in G$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Kreisscheibe $B_\delta(z_0) \subset G$ mit

$$|f(w) - f(z)| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{F} \quad \text{und für alle } w, z \in B_\delta(z_0),$$

lokal ist $\mathcal{F}$ also gleichgradig gleichmäßig stetig.

Tipp: Cauchy-Integralformel über den Rand von $B_{2r}(z_0)$. Hier ist $|\zeta - z||\zeta - w| \geq r^2$.

Beweise anhand dieser gleichgradigen Stetigkeit nun, dass jede Funktionenfolge aus $\mathcal{F}$ eine in G kompakt konvergente Teilfolge enthält.

Tipp: Für welchen Satz aus Analysis II brauchte man gleichgradige Stetigkeit?

Hausaufgabe 3: 3 Punkte

$U \subset \mathbb{C}$ sei Gebiet. Der Betrag der holomorphen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ habe an der Stelle $z_0 \in U$ ein lokales Minimum. Zeige: $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant.

Hausaufgabe 4: 6 Punkte

$f\colon G \to \mathbb{C}$ sei eine nichtkonstante holomorphe Funktion auf dem Gebiet G. Zeige: $f(G)$ ist ein Gebiet. Zeige dazu:

a) $f(G)$ ist zusammenhängend.

b) Zu $w_0 = f(z_0) \in f(G)$ gibt es $r > 0$, sodass f in $\overline{B_r(z_0)}$ nur in z_0 den Wert w_0 annimmt.

c) Es gibt $\delta > 0$, sodass $|f - w_0| \geq \delta$ auf $\partial B_r(z_0)$.

d) Für $|w - w_0| < \frac{\delta}{2}$ hat $z \mapsto f(z) - w$ ein Betragsminimum irgendwo im Innern von $B_r(z_0)$ und nicht auf dem Rand dieser Menge. (Tipp: $z = z_0$.)

e) $f - w$ hat eine Nullstelle in $B_r(z_0)$.

f) $f(G)$ ist offen.

Hausaufgabe 5: 4 Punkte

1. p sei ein nichtkonstantes Polynom. Folgere aus $\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \infty$, dass $p(\mathbb{C})$ abgeschlossen ist.
2. Verwende diese Aussage und die vorhergehende Aufgabe, um den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen.

Hausaufgabe 6: 2+4 Punkte

a) Gegeben sei $\zeta \in \partial B_1(0)$. Finde eine auf $B_1(0)$ holomorphe Funktion $f \not\equiv 0$, deren Nullstellen sich in ζ häufen.

b) Für welche offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$ mit $B_1(0) \subset U$ ist die Restriktionsabbildung

$$\mathcal{R}\colon H(U) \to H(B_1(0)), \qquad f \mapsto f|_{B_1(0)},$$

die also auf U holomorphe Funktionen auf ihre Einschränkung auf $B_1(0)$ abbildet, surjektiv?
(Betrachte die Fälle „U zusammenhängend“ und „U nicht zusammenhängend“ getrennt.)