Michael Winkler
Johannes Lankeit

4.7.2014

13. Übung zur Funktionentheorie im SS 2014

Da am 8. und 9. Juli keine Präsenzübungen zur Funktionentheorie stattfinden, ist es empfehlenswert, die Lösungsskizzen zu den Präsenzaufgaben (insbesondere zu Aufgaben 3) gründlich durchzuarbeiten und etwaige durch den Ausfall gewonnene „zusätzliche Zeit" zur Bearbeitung der Hausaufgaben zu verwenden.

Präsenzaufgabe 1:
Entwickele jeweils f in eine Laurentreihe in $A_{r,R}(z_0)$.

(a) $f(z) := \frac{e^z}{(z-3)^3}$, $\quad z_0 := 3$, $r := 0$, $R := \infty$;

(b) $f(z) := \frac{4}{(z+1)(z-1)^2}$, $\quad z_0 := 0$, $r := 0$, $R := 1$ sowie $r := 1$, $R := \infty$.

Präsenzaufgabe 2:
Bestimme das Residuum von

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-3)^3}$$

in $z_0 = 3$.

Präsenzaufgabe 3:
Berechne mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Hausübungen

Abgabe: 15.7.2014, 5:55 Uhr

Hausaufgabe 1: 3+3 Punkte
Entwickele jeweils f in eine Laurentreihe in $A_{r,R}(z_0)$.

(a) $f(z) := z \sin(\frac{1}{z+2})$, $\quad z_0 := -2$, $r := 0$, $R := \infty$;

(b) $f(z) := \frac{z}{(z-1)(z+2)}$, $\quad z_0 := 0$, $r := 0$, $R := 1$ sowie $r := 1$, $R := 2$ sowie $r := 2$, $R := \infty$;

Hausaufgabe 2: 3+3 Punkte
Es seien $f, g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Hat f in 0 einen Pol und g dort eine wesentliche Singularität, so hat $f + g$ in 0 eine wesentliche Singularität.

(b) f hat genau dann eine wesentliche Singularität in 0, wenn zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert mit $z_k \to 0$ und $|z_k^m f(z_k)| \to \infty$ für $k \to \infty$.

Hausaufgabe 3: 3 Punkte

Die Funktion $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ habe in z_0 einen Pol m-ter Ordnung. Zeige: Dann ist

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right].$$

Hausaufgabe 4: 4+4+4 Punkte

Berechne die folgenden Integrale.

(a) $\int_{\partial B_2(0)} \frac{2z^2+7z+11}{z^3+4z^2-z-4}\, dz$,

(b) $\int_{\partial B_2(-2)} \frac{e^{z^2}}{(z+1)^3(z+2)}\, dz$,

(c) $\int_{\partial H} e^{\frac{1}{z}} \cos(\frac{1}{z})\, dz$, wobei ∂H der Rand des Rechteckes mit den in dieser Reihenfolge durchlaufenen Eckpunkten $-2-i$, $3-i$, $3+2i$ und $-2+2i$ sei und H das Innere dieses Rechteckes bezeichne.

Hausaufgabe 5: 4+4+4 Punkte

Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int_{\partial B_{10}(0)} \left\{ \sin\left(\frac{1}{z-2}\right) + \frac{2\sin(z)-3z}{z} + \frac{1}{z^2+4} \right\} dz$,

(b) $\int_{\partial B_3(0)} \frac{e^z}{z^4+2z^3+2z^2}\, dz$,

(c) $\int_{\partial B_4(0)} \frac{z^2}{e^{2z}-1}\, dz$.

Hausaufgabe 6: 4+4 Punkte

Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2x}{x^4+x^2+1}\, dx$,

(b) $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^4}\, dx$.

Hausaufgabe 7: 5+3+2+5 Punkte

Betrachte die durch $g(z) := \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$ definierte Funktion, wobei natürlich $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$.

a) Bestimme ihre Polstellen und Residuen.

b) Berechne $\int_{\gamma_N} g(z) dz$, wobei γ_N den Rechteckweg bezeichne, der die Punkte $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ miteinander verbindet.

c) Zeige, dass $\cot \pi z$ auf γ_N^* beschränkt ist (mit von N unabhängiger Schranke).

d) Berechne mittels a)-c) den Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.