Michael Winkler
Johannes Lankeit

15.7.2014

14. Übung zur Funktionentheorie im SS 2014

Präsenzaufgabe 1:

(a) Es sei $R(x, y)$ eine rationale Funktion in den Variablen x und y, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 = 1$ wohldefiniert ist. Zeige, dass es eine endliche Menge $A \subset B_1(0)$ und ein $r > 1$ gibt, so dass $\tilde{R} : B_r(0) \setminus A \to \mathbb{C}$, $\tilde{R}(z) := \frac{1}{z} \cdot R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)$ für $z \in B_r(0) \setminus A$, eine holomorphe Funktion ist. Beweise dann, dass gilt:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\, dt = 2\pi \sum_{z \in A} res(\tilde{R}; z). \tag{1}$$

Tipp: Betrachte das Integral $\int_{\partial B_1(0)} \tilde{R}(z)\, dz$ und stelle es mit Hilfe einer Parametrisierung von $\partial B_1(0)$ durch das Integral in (1) dar.

(b) Berechne die Integrale $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{3}+\cos(t)+\sin(t)}\, dt$ und $\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(t)}\, dt$.

Präsenzaufgabe 2:
Berechne die folgenden Integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+9)^2}\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+4}\, dx.$$

Hinweise: 1. Rechteckweg $-R, R, R + iR, -R + iR$.
2. Betrachte die Fortsetzung des Integranden auf $G := \mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \in (-\infty, 0] \subset \mathbb{R}\}$ und nutze Halbkreise durch die obere Halbebene mit Radien ε und R.

Hausübungen

Abgabe: Kalendiis Graecis, 5:55 Uhr

Hausaufgabe 1: 0 Punkte

(a) Bestimme die Anzahl der Nullstellen in $B_1(0)$ (mit Vielfachheiten gezählt) der Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^4 - 3z + 1$ für $z \in \mathbb{C}$.

(b) Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := 3z^8 - 5z^5 + 1$ für $z \in \mathbb{C}$, in $B_1(0)$ genau fünf verschiedene Nullstellen hat.

(c) Zeige, dass die Gleichung $e^{-z} + z = 5$ in $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$ genau eine Lösung hat, und untersuche, ob diese Lösung reell ist.

Hausaufgabe 2: 0 Punkte

Wir sagen von einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, es habe die Quadratwurzeleigenschaft (QWE), wenn zu jeder nullstellenfreien holomorphen Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion $g: G \to \mathbb{C}$ existiert, sodass $(g(z))^2 = f(z)$ für alle $z \in G$.
Der Kürze halber bezeichnen wir außerdem die Einheitskreisscheibe mit $\mathbb{E} := B_1(0)$.

a) Zeige (durch Verweis auf die richtigen Übungsaufgaben), dass jedes sternförmige Gebiet die QWE hat.
Genauer gilt das sogar für jedes „(homologisch) einfach zusammenhängende“ Gebiet, also für jedes Gebiet mit der Eigenschaft, dass jeder geschlossene SGW darin nullhomolog ist.

b) Zeige: Ist $\widehat{f}\colon G \to \widehat{G}$ biholomorph und hat G die QWE, so hat auch $\widehat{G}$ die QWE.

c) Es sei G ein Gebiet mit $0 \in G$ und $\mathbb{C} \setminus G$ enthalte $B_r(z_0)$ für ein $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeige: Es gibt eine injektive holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbb{E}$ mit $f(0) = 0$.

d) Es sei $G \neq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit QWE und $0 \in G$. Zeige: Es gibt eine holomorphe, injektive Funktion $f\colon G \to \mathbb{E}$ mit $f(0) = 0$.
Tipp: Zeige dazu: Die Wurzel v von $z - a$ (wie sollte man a wählen?) ist injektiv und erfüllt $v(G) \cap -v(G) = \emptyset$.

e) Für $c \in \mathbb{E}$ definieren wir $g_c\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ durch $g_c(z) = \frac{z-c}{\bar{c}z-1}$. Zeige: g_c ist wohldefiniert und erfüllt $g_c \circ g_c = id_{\mathbb{E}}$.

f) Für $c \in \mathbb{E}$ definieren wir $\Psi_c\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ durch $\Psi_c(z) = g_{c^2}((g_c(z))^2)$.
Zeige: Ψ_c ist wohldefiniert, holomorph und erfüllt $\Psi_c(0) = 0$. Außerdem ist für alle $z \in \mathbb{E}\setminus\{0\}$ auch $|\Psi_c(z)| < |z|$.
(Tipp: Zeige „$\leq$“ und argumentiere, um Gleichheit auszuschließen, mit der Nicht-Biholomorphie von $z \mapsto z^2$.)

g) Es sei $G \subset \mathbb{E}$ ein Gebiet mit QWE und $c \in \mathbb{E}$ mit $c^2 \notin G$. v sei die Quadratwurzel aus g_{c^2} auf G mit $v(0) = c$. Definiere $\kappa\colon G \to \mathbb{E}, z \mapsto g_c(v(z))$. Zeige: κ ist wohldefiniert, $\kappa(0) = 0$, $\kappa(G) \subset \mathbb{E}$, $\Psi_c \circ \kappa = id_G$ und folgere Injektivität von κ und mit f), dass $|z| < |\kappa(z)|$ für alle $z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ erfüllt ist.

h) Es sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Injektion. Zeige: Dann ist f biholomorph.
Zeige dazu mit dem Offenheitssatz (Übung 11, HA 4), dass zu f eine stetige Umkehrabbildung existiert. Folgere aus Satz 2.8, dass f^{-1} holomorph auf $f(D) \setminus f(N(f'))$ ist, wobei $N(f') = \{z \in G; f'(z) = 0\}$. Zeige (Identitätssatz): $N(f')$ ist diskret und abgeschlossen, also auch $f(N(f'))$. Folgere Holomorphie von f^{-1}.

i) Für ein Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ mit $0 \in G$ und QWE setze

$$\mathcal{F}_G = \{f\colon G \to \mathbb{E} \text{ holomorph und injektiv, } f(0) = 0\}.$$

Zeige: $\mathcal{F}_G \neq \emptyset$ und jedes $f \in \mathcal{F}_G$ ist biholomorph

j) Es sei $G \neq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit QWE und $0 \neq p \in G$. Zeige: Erfüllt $h \in \mathcal{F}_G$

$$|h(p)| = \sup\{|f(p)|; f \in \mathcal{F}_G\},$$

so ist $h(G) = \mathbb{E}$. (Betrachte dazu in einem Widerspruchsbeweis $\kappa \circ h$ für ein geeignetes κ wie in g).)

k) Die Funktionen f_n seien holomorph auf dem Gebiet G und kompakt konvergent gegen eine nichtkonstante Funktion f. Folgere aus dem Satz von Rouché, dass zu jedem $c \in G$ ein $n_c \in \mathbb{N}$ und eine Folge $c_n \to c$ existieren mit $f_n(c_n) = f(c)$ für alle $n > n_c$.

l) Die Funktionen f_n seien holomorph auf dem Gebiet G und konvergieren kompakt gegen die nichtkonstante Funktion f. Zeige: Sind alle f_n nullstellenfrei, so hat auch f keine Nullstelle.
Zeige weiter: Gilt für eine Menge $A \subset \mathbb{C}$, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $f_n(G) \subset A$, so ist auch $f(G) \subset A$. Und sind alle f_n injektiv, so ist auch f injektiv.

m) Zeige den folgenden Satz: Jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $G \neq \mathbb{C}$ und QWE lässt sich biholomorph auf $\mathbb{E}$ abbilden.
Anleitung: (OBdA $0 \in G$) Wähle $p \in G \setminus \{0\}$. Zeige: $\mu := \sup\{|f(p)|; f \in \mathcal{F}_G\} > 0$. Wähle eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_G$ mit $f_n(p) \to \mu$ und weise die Existenz eines Grenzelements h in $\mathcal{F}_G$ nach. Schließe, dass $h(G) = \mathbb{E}$ und dass h biholomorph ist.

Hausaufgabe 3: 0 Punkte

Was besagen die folgenden Sätze/Lemmata und wo (welche Nr. in der Vorlesung, welche Aufgabe auf welchem Übungsblatt) haben wir sie jeweils eingeführt?
Riemannscher Abbildungssatz, Satz von Hurwitz, Satz von Montel, Schwarzsches Lemma, Satz von Morera, Integralsatz von Cauchy, Satz von Liouville, Maximumprinzip, Satz von Weierstraß-Casorati, Weierstraßscher Konvergenzsatz, Weierstraßsches Majorantenkriterium, Riemannscher Hebbarkeitssatz, Identitätssatz, Offenheitssatz, Satz von der Gebietstreue, Cauchysche Integralform**el**, Residuensatz, Satz von Rouché?