Michael Winkler
Johannes Lankeit

15.4.2014

2. Übung zur Funktionentheorie im SS 2014

Präsenzaufgabe 1:
Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar als Funktionen

a) von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$,

b) von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ (also komplex differenzierbar)?

$$i) f(z) = const \qquad ii) f(z) = z \qquad iii) f(z) = \frac{1}{z} \ \ (z \neq 0) \qquad iv) f(z) = z\overline{z}?$$

Bestimme auch (anhand der Definition) ihre Ableitung, wenn möglich.

Präsenzaufgabe 2:
Welche Darstellungsmatrix hat die Abbildung "Multiplikation mit $a + ib$" als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$?

Präsenzaufgabe 3:

a) Zeige: Eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann in $z \in \mathbb{C}$ differenzierbar, wenn es eine stetige lineare Abbildung $T_z\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und eine Funktion $R\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, sodass für alle $h \in \mathbb{C}$

$$f(z + h) = f(z) + T_z h + R(h)$$

gilt und $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0$ ist. Bestimme $f'(z)$.

b) Worin könnte der Vorteil dieser Beschreibung gegenüber dem "Differentialquotienten" liegen?

c) Aus Analysis II kennen wir eine sehr ähnliche Charakterisierung der Differenzierbarkeit: $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist differenzierbar in $x \in \mathbb{R}^2$ genau dann, wenn es eine lineare Abbildung $T_x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt mit $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{|h|} = 0$ und

$$f(x + h) = f(x) + T_x h + R(h).$$

Was ist der Unterschied? (Woher wissen wir, dass es einen Unterschied geben **muss**?)

d) Zeige: Eine weitere äquivalente Definition der Differenzierbarkeit ist die folgende: $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar in $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn es eine in 0 stetige Funktion $\widehat{f}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z + h) = f(z) + \widehat{f}(h)h.$$

Wie lässt sich hier $f'(z)$ ablesen?

Präsenzaufgabe 4:
Finde alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichungen

$$a)\ z^2 = i, \qquad b)\ z^2 - z + 1 = 0.$$

Hausübungen

Abgabe: 22.4.2014, 5:55 Uhr

Hausaufgabe 1: 15 Punkte

Gegeben seien $a_0, \dots a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Wo sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar?

$$i) f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad ii) f(z) = |z|^2 \qquad iii) f(z) = \mathrm{Re}(z) \qquad iv) f(z) = |z| \qquad v) f(z) = \frac{1}{z^n} \text{ für } z \neq 0$$

Bestimme, wo sie komplex differenzierbar sind, auch ihre Ableitung.

Hausaufgabe 2: 6 Punkte

Finde alle Lösungen der Gleichung $z^2(1-z^2) = 1$ sowie von $z^2 = (a+ib)^2$ bei vorgegebenen $a, b \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 3: 3 Punkte

Eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erfülle für $z \in \mathbb{C}$ und alle $h \in \mathbb{C}$

$$f(z+h) = f(z) + T(z)h + R(h)$$

mit einer Funktion R mit $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{|h|} = 0$ und (in dem Argument h stetiger und $\mathbb{R}$-)linearer Funktion $T(z)$. Beweise: f ist genau dann komplex differenzierbar in z, wenn $T(z)$ auch $\mathbb{C}$-linear bezüglich h ist.

Hausaufgabe 4: 4+2+1+2+1 Punkte

Es sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}^{\pm} = \mathbb{H} \cup (-\mathbb{H})$. Zu jeder invertierbaren reellen 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (also zu jedem $A \in GL_2(\mathbb{R})$) betrachten wir

$$f_A\colon \mathbb{H}^{\pm} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

a) Zeige: f_A ist wohldefiniert und an jeder Stelle komplex differenzierbar. Bestimme die Ableitung.

b) Zeige: Für $A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ gilt $f_A \circ f_B = f_{AB}$.

c) Zeige: $f_A(\mathbb{H}^{\pm}) = \mathbb{H}^{\pm}$. Außerdem ist f_A bijektiv und die Umkehrabbildung ist überall komplex differenzierbar.

d) Zeige: $f_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ genau dann, wenn $\det A > 0$.

e) Warum haben wir hier die Abbildung für $A \in GL_2(\mathbb{R})$ und nicht für $A \in GL_2(\mathbb{C})$ definiert?

Hausaufgabe 5: 2+4+2 Punkte

a) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Zeige: f ist genau dann reell differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn es $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gibt, sodass für $h \in \mathbb{C}$

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \lambda h + \mu \overline{h} + R(h),$$

wobei $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0$. Wir schreiben auch $\lambda = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f_z(z_0)$ und $\mu = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = f_{\overline{z}}(z_0)$.
Diese Werte heißen **Wirtinger-Ableitungen** von f in z_0.

b) Bestimme die Wirtinger-Ableitungen von $f = \mathrm{Im}$ und von $f(z) = z\overline{z}$.

c) Zeige: $f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y)$, $f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$, wobei f_x und f_y die Ableitungen von f nach dem Real- bzw. Imaginärteil des Arguments bezeichnen (in der Notation aus Präsenzaufgabe 3a: $f_x(z) = T_z\, 1$, $f_y(z) = T_z\, i$).