Michael Winkler
Johannes Lankeit

22.4.2014

3. Übung zur Funktionentheorie im SS 2014

Präsenzaufgabe 1:
Die holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ habe den Realteil

$$u(x,y) = \operatorname{Re}(f(x+iy)) = x^2 + 2axy + by^2, \qquad x,y \in \mathbb{R},$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$.
Welche Werte sind für a und b möglich?
Bestimme jeweils auch f.

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $a \in \mathbb{C}$. Betrachte die Funktionenfolge, die durch

$$f_n(z) = \frac{1}{1+az^n}, \qquad z \in B_1(0),\ n \in \mathbb{N},$$

definiert wird. Untersuche sie auf punktweise, gleichmäßige und kompakte Konvergenz auf $B_1(0)$.

Präsenzaufgabe 3:
Stelle die auf $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$ durch

$$z \mapsto \frac{z}{(1-az)(1-bz)}$$

gegebene Funktion durch eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 dar und bestimme deren Konvergenzradius.

Präsenzaufgabe 4:
Beweise oder widerlege: Wenn die Potenzreihen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ die Konvergenzradien R_A bzw. R_B haben, so hat ihre Summe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$ den Konvergenzradius

a) $R_A + R_B$,

b) $\min\{R_A, R_B\}$.

Hausübungen

Abgabe: 29.4.2014, 5:55 Uhr

Hausaufgabe 1: 12 Punkte

Bei welchen der folgenden Funktionen $u\colon \widetilde{G} \to \mathbb{R}$ kann es sich um den Realteil einer in G holomorphen Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ mit $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ für $x+iy \in G$ mit $x,y \in \mathbb{R}$ handeln?
Bestimme dann außerdem f.

a) $u(x,y) = e^x(x\cos(y) - y\sin(y))$, $G = \mathbb{C}$, $\widetilde{G} = \mathbb{R}^2$,

b) $u(x,y) = \sin(x)\cos(y)$, $G = \mathbb{C}$, $\widetilde{G} = \mathbb{R}^2$,

c) $u(x,y) = \frac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^3}$, $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\widetilde{G} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Hausaufgabe 2: 2 Punkte

Zeige: Eine reell differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann in $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn[1]

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.$$

Hausaufgabe 3: 6 Punkte

An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen jeweils komplex differenzierbar?

$$f(z) = z\mathrm{Re}(z),\ \ z \in \mathbb{C}, \qquad f(x+iy) = x^3y^2 + ix^2y^3,\ \ x,y \in \mathbb{R}, \qquad f(z) = z\overline{z} + \frac{z}{\overline{z}},\ \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Hausaufgabe 4: 3 Punkte

Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei holomorph, reellwertig und erfülle $f(42) = 42$. Bestimme f.

Hausaufgabe 5: 6 Punkte

Wo konvergiert (für $|z| \neq 1$) die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}?$$

Konvergiert sie auf dieser Menge auch kompakt? Auch gleichmäßig?

Hausaufgabe 6: 10 Punkte

Zeige:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} z^{n-1}$$

konvergiert in $B_1(0)$ und in $\mathbb{C} \setminus B_1(0)$.

Bestimme die Grenzfunktion und weise nach, dass es sich um kompakte Konvergenz handelt.
Tipp: Betrachte das Produkt mit $(1-z)z$.

[1] Für die Definition der Wirtinger-Ableitung $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ siehe HA 5 des zweiten Übungsblattes.