Michael Winkler
Johannes Lankeit

29.4.2014

4. Übung zur Funktionentheorie im SS 2014

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

a) Zeige: Existiert $\lim \frac{a_n}{a_{n+1}}$, so erfüllt der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

b) Falls $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ nicht konvergiert: Welche der folgenden Beziehungen gelten?

$$R \le \limsup \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad R = \limsup \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad R \ge \limsup \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$
$$R \le \liminf \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad R = \liminf \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad R \ge \liminf \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Präsenzaufgabe 2:
Es handelt sich bei sin um eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit Ableitung cos. Wie zeigt man das? (Skizziere den Beweis nochmal.)

Präsenzaufgabe 3:
Untersuche für $z \in \{1+2i, -4i, 4-3i, -4+i\sqrt{20}\}$, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (n!)^2}{(2n)!} z^n$ konvergent oder divergent ist.

Präsenzaufgabe 4:
Bestimme den Konvergenzradius R und, falls $R \in (0,\infty)$, den Konvergenzkreis der folgenden Potenzreihen.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - i\right)^n \cdot (z-5i-10)^n$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n n!}{(3n)^n} \cdot (z-2+i)^n$,

(c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(2+5\sqrt{k})i}{k(k-1)} \cdot (z-3i)^{k!}$.

Hausübungen

Abgabe: 6.5.2014, 5:55 Uhr

Hausaufgabe 1: 3 Punkte
Es gebe $k \in \mathbb{N}$ derart, dass die Folge $(\frac{a_n}{n^k})_n$ beschränkt ist. Zeige: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hat einen Konvergenzradius $R \ge 1$.

Hausaufgabe 2: 8 Punkte

Bestimme die Konvergenzradien von

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})^n(z-15+i)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(z+iz)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{(6+8i)^n}(z^2-2z+1)^n$$

sowie von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-42i)^n$, wobei

$$c_n = \begin{cases} 1, & \text{falls 42 die Zahl } n \text{ teilt} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hausaufgabe 3: 16 Punkte

Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen und untersuche das Konvergenzverhalten am Rande des Konvergenzkreises:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(z-\sqrt{5}+2i)^{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n)z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}(z+4i)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}(z+4i)^{n^2}$$

Hausaufgabe 4: 2 Punkte

Zeige: Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$ ist mindestens so groß wie das Produkt der Konvergenzradien von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$.

Hausaufgabe 5: 3 Punkte

Seien R_A und R_B die Konvergenzradien von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$

hat einen Konvergenzradius $R \geq \min\{R_A, R_B\}$.

Hausaufgabe 6: 4 Punkte

Bestimme den Konvergenzkreis B der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(z-1)^n$.

Zeige, dass $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(z-1)^n$ in B holomorph ist, und bestimme $f'(z)$.

Hausaufgabe 7: 3 Punkte

Bestimme $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$.