Michael Winkler
Johannes Lankeit

6.5.2014

5. Übung zur Funktionentheorie im SS 2014

Präsenzaufgabe 1:
Beweise die folgenden Aussagen (Proposition 3.11 der Vorlesung):

(e) Für die Funktionen sin und cos gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(z_1+z_2) &= \sin(z_1)\cos(z_2)+\cos(z_1)\sin(z_2) \qquad \text{für alle } z_1,z_2\in\mathbb{C}, \\ \cos(z_1+z_2) &= \cos(z_1)\cos(z_2)-\sin(z_1)\sin(z_2) \qquad \text{für alle } z_1,z_2\in\mathbb{C} \end{aligned}$$

sowie der „trigonometrische Satz des Pythagoras"

$$\sin^2(z)+\cos^2(z)=1 \qquad \text{für alle } z\in\mathbb{C}.$$

(f) Die Funktionen sin und cos sind periodisch in $\mathbb{C}$ mit Periode 2π, und die Funktion exp ist periodisch in $\mathbb{C}$ mit Periode $2\pi i$.

Präsenzaufgabe 2:
Für $z=x+iy\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $x=Re(z)$ und $y=Im(z)$ sei

$$\arg_0(z) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \text{falls } x>0 \text{ und } y\geq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } x=0 \text{ und } y>0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi, & \text{falls } x<0, \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{falls } x=0 \text{ und } y<0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+2\pi, & \text{falls } x>0 \text{ und } y<0. \end{cases}$$

(a) Zeigen, dass $\arg_0(z)\in[0,2\pi)$ und

$$z=|z|\cdot e^{i\cdot\arg_0(z)}=|z|\cdot(\cos(\arg_0(z))+i\cdot\sin(\arg_0(z)))$$

für jedes $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ gelten. Wie kann man $\arg_0(z)$ geometrisch in der komplexen Ebene bestimmen?

(b) Es sei $\Phi\in\mathbb{R}$. Definiere $\arg_\Phi(z)=f_\Phi(\arg_0(z))$ mit Hilfe einer geeigneten Funktion $f_\Phi:[0,2\pi)\to[\Phi,\Phi+2\pi)$, so dass $\arg_\Phi(z)\in[\Phi,\Phi+2\pi)$ und

$$z=|z|\cdot e^{i\cdot\arg_\Phi(z)}=|z|\cdot(\cos(\arg_\Phi(z))+i\cdot\sin(\arg_\Phi(z)))$$

für jedes $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ gelten.
Was ist $\arg_\Phi$ geometrisch?

(c) Bestimme

$$\arg_0(i),\arg_\pi(i),\arg_{2\pi}(i),\arg_{-3\pi}(i),\arg_0(1-\sqrt{3}i).$$

Präsenzaufgabe 3:
Skizziere in der komplexen Zahlebene die Zahlen

$$z_1=3e^{-\frac{\pi i}{2}} \qquad z_2=2e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Zeichne außerdem z_1z_2 und alle Lösungen der Gleichung $\xi^2=4+3i$ ein.

Hausübungen

Abgabe: 13.5.2014, 5:55 Uhr

Hausaufgabe 1: 4+4 Punkte

(a) Zeige mit Hilfe von Definition 1.1, Proposition 3.11 und Präsenzaufgabe 2, dass

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\arg_\Phi(z_1)+\arg_\Phi(z_2))}$$

für $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\Phi \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Bestimme für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\Phi \in \mathbb{R}$ das Inverse z^{-1} in Polarkoordinaten in der Form $z^{-1} = |z^{-1}| \cdot e^{i \cdot \arg_\Phi(z^{-1})}$ so, dass diese Darstellung von z^{-1} nur von $|z|$ und $\arg_\Phi(z)$ abhängt.

Hausaufgabe 2: 12 Punkte

Gib die Lösungen jeweils in der Form $z = |z| \cdot e^{i \cdot \arg_0(z)}$ an.

(a) Bestimme alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = 2i$.

(b) Bestimme alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 - \sqrt{3}\, z^2 + 1 = 0$.

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimme alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = 1$. (Die Lösungen dieser Gleichung heißen n-te Einheitswurzeln.)

Hausaufgabe 3: 2 Punkte

Skizziere die Menge $\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z^2) < 0\}$.

Hausaufgabe 4: 6 Punkte

Wo erfüllt

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, wo ist f komplex differenzierbar?