Michael Winkler
Johannes Lankeit

13.5.2014

6. Übung zur Funktionentheorie im SS 2014

Präsenzaufgabe 1:
Berechne (mit den Bezeichnungen aus den Definitionen 3.17 und 3.26 der Vorlesung) die folgenden komplexen Zahlen

(a) $\ln(i)$, $\quad \ln(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i\sqrt{2})}{2})$, $\quad \ln(i \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i\sqrt{2}}{2}))$.

(b) $\sqrt{1+i}$, $\quad \left(\sqrt{-1+i}\right)^2$, $\quad \sqrt{(-1+i)^2}$.

Präsenzaufgabe 2:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = i^2 = -1.$$

Was ist hier falsch?

Präsenzaufgabe 3:
Gib ein maximales Gebiet an, auf dem $Ln(1 + \sqrt[3]{z})$ als holomorphe Funktion definiert werden kann.

Präsenzaufgabe 4:
i^i ist reell. Gibt es noch andere Werte $z \in \mathbb{C}$, sodass z^i reell ist?

Hausübungen

Abgabe: 20.5.2014, 5:55 Uhr

Hausaufgabe 1: 4 Punkte

Berechne (mit den Bezeichnungen aus den Definitionen 3.17 und 3.26 der Vorlesung)

a) $\ln(1+i)$, $\quad \ln(e^{8i+42})$.

(b) $\left(\sqrt{-i}\right)^{3i}$, $\quad \sqrt{(1+i)^{5i}}$.

Hausaufgabe 2: 4 Punkte

Gib ein maximales Gebiet an, auf dem $\sqrt{z + \sqrt{z}}$ als holomorphe Funktion definiert werden kann.

Hausaufgabe 3: 3 Punkte

Es sei $g : B_1(1) \to \mathbb{C}$, $g(z) := \ln(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ für $z \in B_1(1)$.
Zeige, dass die Funktion g konstant ist.
Folgere daraus, dass $\ln(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ für $z \in B_1(1)$ gilt.

Hausaufgabe 4: 3 Punkte

Zeige: Für alle $z \in \mathbb{C}$ (für die beide Seiten definiert sind) ist $\log(z) \neq \log(-z)$. Was ist an folgendem Argument (das Johann Bernoulli verwendet haben soll) falsch?

$$\log((-z)^2) = \log(z^2) \quad \Longrightarrow \quad 2\log(-z) = 2\log(z) \quad \Longrightarrow \quad \log(-z) = \log(z).$$

Hausaufgabe 5: 4+3+2 Punkte

a) Zeige: Die Funktion

$$g\colon \mathbb{C}^- \to \mathbb{C} \setminus \{z \in i\mathbb{R};\ |z| \geq 1\}, \qquad z \mapsto \frac{1}{i}\frac{z-1}{z+1}$$

ist wohldefiniert und biholomorph (d.h. die Funktion ist bijektiv und Funktion sowie Umkehrfunktion sind holomorph). Bestimme ihre Umkehrfunktion explizit.

b) Zeige, indem du ihn als Komposition geeigneter Funktionen schreibst, dass der Tangens tan auf der Menge $\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ biholomorph ist.

c) Mit ln als Hauptzweig des Logarithmus setze

$$\arctan\colon \mathbb{C} \setminus \{z \in i\mathbb{R};\ |z| \geq 1\} \to \mathbb{C}, \quad w \mapsto \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right).$$

Zeige: arctan ist wohldefiniert, holomorph und kehrt tan um.

Hausaufgabe 6: 6 Punkte

Sei G ein Gebiet. Von einer holomorphen Funktion $g\colon G \to \mathbb{C}$ sagt man, sie habe in $a \in G$ eine Nullstelle k-ter Ordnung (für ein $k \in \mathbb{N}$), wenn eine auf G holomorphe Funktion $\widetilde{g}$ existiert, sodass $g(z) = (z-a)^k \widetilde{g}(z)$ und $\widetilde{g}(a) \neq 0$.

Beweise: Auf dem Gebiet G sei die holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ gegeben, die in $z_0 \in G$ eine Nullstelle n-ter Ordnung habe. Genau dann kann man in einer Umgebung von z_0 eine holomorphe k-te Wurzel (mit $k \in \mathbb{N}$) aus f ziehen, wenn k ein Teiler von n ist. (Eine holomorphe k-te Wurzel aus f ist dabei eine holomorphe Funktion g mit $(g(z))^k = f(z)$ für alle z aus ihrem Definitionsbereich.)

Verwende dazu (ohne Beweis) die folgenden Aussagen:

Sei G ein konvexes Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ohne Nullstelle. Dann existiert eine holomorphe Funktion $h\colon G \to \mathbb{C}$, sodass

$$e^{h(z)} = f(z) \qquad \forall z \in G.$$

(Diesen Satz werden wir mit Mitteln des fünften Kapitels beweisen können.)

Wenn eine holomorphe Funktion an einer Stelle z_0 eine Nullstelle hat, so handelt es sich bei z_0 um eine Nullstelle k-ter Ordnung für ein $k \in \mathbb{N}$. (Das folgt aus Aussagen des sechsten Kapitels.)