Michael Winkler
Johannes Lankeit

20.5.2014

7. Übung zur Funktionentheorie im SS 2014

Für die Aufgaben auf diesem Blatt sind Aussagen des Kapitels 5 noch nicht zu verwenden.

Präsenzaufgabe 1:
Parametrisiere die folgenden Wege:

a) Die Strecke von 0 nach $1 + i$.

b) Den Weg von 0 nach $1 + i$, der zuerst gerade nach rechts und dann gerade nach oben verläuft.

c) Einen Weg von 0 nach $1 + i$ entlang eines Parabelbogenstücks.

d) Einen zweimal im Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis mit Mittelpunkt $1 + i$ und Radius 2.

Integriere die Funktionen $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ und $g(z) = z$ entlang dieser Wege.

Präsenzaufgabe 2:
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg sowie $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ stetig.
Weiter sei $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(a + b - t)$, $t \in [a, b]$.
Zeige, dass

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = -\int_{\gamma} f(z)\, dz$$

gilt.

Präsenzaufgabe 3:
Zeige:

a) Sind $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ und ist $\gamma(t) = z_0 + re^{\pm it}$, $t \in [0, 2\pi]$, so gilt

$$n(\gamma, z) = \begin{cases} \pm 1, & \text{falls } z \in B_r(z_0), \\ 0, & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(z_0)}. \end{cases}$$

b) Sind $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2k\pi]$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$n(\gamma, z) = \begin{cases} \pm k, & \text{falls } z \in B_r(z_0), \\ 0, & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(z_0)}. \end{cases}$$

Präsenzaufgabe 4:
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph (mit stetiger Ableitung f') sowie γ ein SGW in G mit Anfangs- bzw. Endpunkt a bzw. b.
Zeige, dass dann

$$\int_{\gamma} f'(\zeta) d\zeta = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Hausübungen

Abgabe: 27.5.2014, 5:55 Uhr

Hausaufgabe 1: 3+3+4+4+4 Punkte

Berechne die folgenden Kurvenintegrale.

(a) $\int_{[0,4i]} z^2\,dz$,

(b) $\int_\gamma z^2\,dz$ mit $\gamma(t) := 2i + 2e^{it}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

(c) $\int_\gamma \ln(z)\,dz$ mit $\gamma(t) := \begin{cases} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot t & \text{für } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ e^{i(\frac{\pi}{4}-(t-1))} & \text{für } t \in (1, 1+\frac{\pi}{2}], \end{cases}$

(d) $\int_\gamma \sin(z)\,dz$ mit $\gamma(t) := \begin{cases} t^2 + i \cdot e^t & \text{für } t \in [0,1], \\ 1 + i \cdot (e + 1 - t) & \text{für } t \in (1, e], \\ \cos(t-e) + i \cdot (1 - \frac{4(t-e)}{\pi}) & \text{für } t \in \left(e, e + \frac{\pi}{2}\right], \end{cases}$

(e) $\int_\gamma e^z\,dz$ mit $\gamma(t) := \begin{cases} e^{\pi i t} & \text{für } t \in [0,1], \\ -t + i \cdot \ln(t) & \text{für } t \in (1, e], \\ -e^{t-e+1} + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + (t-e)\pi\right) & \text{für } t \in (e, e+5]. \end{cases}$

Hausaufgabe 2: 2 Punkte

Es seien $\gamma_1, \gamma_2 \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ geschlossene stückweise glatte Wege mit einem gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt. Definiere einen Weg $\gamma_1 \cdot \gamma_2 := \gamma \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ \gamma_2(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus (\gamma_1^* \cup \gamma_2^*)$.

Zeige

$$n(\gamma, z) = n(\gamma_1, z) + n(\gamma_2, z).$$

Hausaufgabe 3: 4 Punkte

Finde einen Weg γ derart, dass

$$n(\gamma, 1) = 1 \quad \text{und} \quad n(\gamma, 2) = 2$$

gelten, und weise diese beiden Eigenschaften nach.

Tipp: Bevor du „besonders hässliche“ Integrale ausrechnest, möchtest du vielleicht zunächst andere Argumentationen nutzen oder gar einen einfacheren Weg suchen.

Hausaufgabe 4: 3 Punkte

Gegeben sei der Weg $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t) = i \arctan(\sqrt{2 + \sin(4t)\cos(2t)} - 8) + \frac{(\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2})^2}{12 + \cos(t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n i^n}{n!}.$$

Zeige: Es handelt sich um einen stückweise glatten geschlossenen Weg.
Bestimme $n(\gamma, 42i)$.