Michael Winkler
Johannes Lankeit

27.5.2014

8. Übung zur Funktionentheorie im SS 2014

Präsenzaufgabe 1:

a) Skizziere ein sternförmiges Gebiet G mit zwei Punkten $z_1, z_2 \in G$ derart, dass z_1 ein Zentrum ist, z_2 aber nicht.

b) Ist dein Gebiet G aus a) auch konvex?

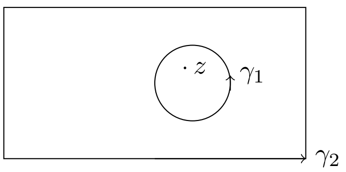
Präsenzaufgabe 2:
Berechne die folgenden Integrale:

$$a) \int_{\partial B_3(2i)} \frac{3}{z-2i} dz, \qquad b) \int_{\partial B_3(2i)} \frac{z^2}{z-2i} dz,$$

$$c) \int_{\partial B_3(2i)} \frac{3}{z-i} dz, \qquad d) \int_{\partial B_1(i)} \frac{e^z}{z^2+1} dz,$$

$$e) \int_{\partial B_2(1)} \frac{z^{18} - 2z^4 + \sin(z)}{(z-4)^2(z+3i)} dz, \qquad f) \int_{\partial B_2(2+i)} \frac{\ln(z)}{z^2-2} dz.$$

Präsenzaufgabe 3:



Zeige: $n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z)$.

Präsenzaufgabe 4:
In Hausaufgabe 5 auf Übungsblatt 6 haben wir die Funktion

$$\arctan\colon \mathbb{C} \setminus \{z \in i\mathbb{R};\ |z| \geq 1\} \to \mathbb{C}, \quad w \mapsto \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right).$$

definiert und nachgewiesen, dass sie holomorph ist und den Tangens umkehrt.
Zeige: Für $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{z \in i\mathbb{R};\ |z| \geq 1\}$ ist

$$\arctan(w_0) = \int_{[0,w_0]} \frac{1}{1+w^2} dw.$$

Kann der wie auf Blatt 6 definierte Arcustangens holomorph auf eine echt größere Menge fortgesetzt werden?
Tipp: Nimm in deiner Argumentation ein geeignetes Wegintegral zu Hilfe.

Hausübungen

Abgabe: 10.6.2014, 5:55 Uhr

Hausaufgabe 1: 2+2 Punkte

Zeige:

a) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig.

b) Jede sternförmige Menge ist zusammenhängend.

Hausaufgabe 2: je 3 Punkte

Berechne die folgenden Integrale:

$$a) \int_{\partial B_1(2i)} \frac{e^{z^2}}{2i - z} dz, \qquad b) \int_{\partial B_\pi(0)} \frac{\cos(\pi z)}{z^2 - 1} dz,$$

$$c) \int_{\partial B_{\frac{3}{2}}(i-4)} \frac{\zeta^2 - 4\zeta + 7}{(\zeta - 1)(\zeta + 3)(\zeta - i)} d\zeta, \qquad d) \int_{\partial B_1(0)} \frac{|z|}{z} dz,$$

$$e) \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{|z|} dz, \qquad f) \int_{\partial B_3(0)} \frac{z e^{\pi z}}{(z^2 + 4)(z^2 + 1)} dz.$$

Hausaufgabe 3: 2+3+1+3 Punkte

Für $a > 0$ und $R > 0$ bezeichne $\gamma_{a,R}$ den Weg, der nacheinander durch folgende Strecken angegebenen Teilwege durchläuft:

$$\gamma_{1,a,R} : [-R, R], \quad \gamma_{2,a,R} : [R, R + ia], \quad \gamma_{3,a,R} : [R + ia, -R + ia], \quad \gamma_{4,a,R} : [-R + ia, -R].$$

a) Berechne für $a > 0$, $R > 0$ das Integral $\int_{\gamma_{a,R}} e^{-\frac{z^2}{2}} \,\mathrm{d}z$.

b) Zeige, dass für jedes $a > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_{2,a,R}} e^{-\frac{z^2}{2}} \,\mathrm{d}z \right| = \lim_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_{4,a,R}} e^{-\frac{z^2}{2}} \,\mathrm{d}z \right| = 0.$$

c) Folgere für $a > 0$, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ia)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

d) Zeige

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(ax) dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{a^2}{2}} \sqrt{2\pi}.$$

Hausaufgabe 4: 4 Punkte

Finde eine beliebig oft reell differenzierbare Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$, aber $\int_{\partial B_1(0)} \frac{f(z)}{z} dz \neq 0$ (und weise diese Eigenschaft nach).

Hausaufgabe 5: 5 Punkte

Es sei $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die $\mathrm{Re}(f(z)) > 0$ für alle $z \in \partial B_1(0)$ erfüllt.
Zeige: f hat keine Nullstelle in 0.