Michael Winkler
Johannes Lankeit

10.6.2014

9. Übung zur Funktionentheorie im SS 2014

Präsenzaufgabe 1:
Es seien $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Ferner sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in einer Umgebung von $B_r(z_0)$ holomorph. Definiere die Funktion $g\colon \mathbb{C} \setminus \partial B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Bestimme $g(z_0)$ sowie $g(z_0 + 2ir)$.
Zeige: g ist holomorph.

Präsenzaufgabe 2:
($\star$) In Dunford/Schwartz: Linear Operators (Part I, VII.3.9) findet sich für gewisse Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und stetige lineare Operatoren $T\colon X \to X$ (wobei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum ist) die folgende Definition für $f(T)$:

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i} \int_B f(\lambda) R(\lambda; T) d\lambda.$$

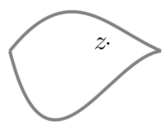
(Dabei ist B der im positiven Sinne durchlaufene Rand einer geeigneten offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$.)
Zum Beispiel könnte $X = \mathbb{C}^n$ und T eine komplexe $n \times n$-Matrix sein.

a) Welche Eigenschaft wird von der Funktion f gefordert sein?

b) Wie, vermutest du, ist $R(\lambda; T)$ definiert?

c) Was könnte „geeignete offene Menge“ bedeuten?

Präsenzaufgabe 3:
Die holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nehme in jedem Punkt der im Folgenden als graue Linie eingezeichneten Menge den Wert 42 an. Auch z sei so, wie aus der Zeichnung hervorgeht. Bestimme $f(z)$.



Präsenzaufgabe 4:
f sei holomorph in einer Umgebung von $B_r(z_0)$ und zweimal stetig differenzierbar (was keine weitere Einschränkung ist). Zeige, dass die Funktion

$$z \mapsto \frac{(z - z_0) f'(z_0) - f(z) + f(z_0)}{(z - z_0)^2}$$

in $B_r(z_0)$ beschränkt ist.

Hausübungen

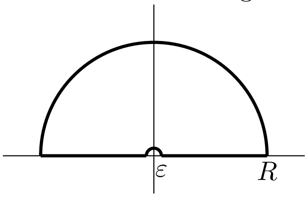
Abgabe: 17.6.2014, 5:55 Uhr

Hausaufgabe 1: 8 Punkte

Berechne, mit ähnlichem Vorgehen wie in Blatt 8, Hausaufgabe 3, das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Verwende dabei Integration einer geeigneten Funktion entlang folgender Wege:



Tipp: $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$; $iRe^{it} = iR\cos(t) - R\sin(t)$.

Hausaufgabe 2: 4 Punkte

Welche Werte kann $\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} dz$ für Wege γ von 0 nach 1 mit $\gamma^* \cap \{-i, i\} = \emptyset$ annehmen?

Hausaufgabe 3: 12 Punkte

Berechne die folgenden Integrale:

$$a)\ \int_0^{2\pi} e^{e^{it}} dt \qquad b)\ \int_{\partial B_{10}(1-2i)} \frac{39! z e^z}{(z+5)^{42}} dz \qquad c)\ \int_0^{4\pi} e^{e^{it}-3it} dt$$

$$d)\ \int_{B_5(i)} \frac{e^{\cos(\zeta)}}{(\zeta - \frac{\pi}{2})^2} d\zeta \qquad e)\ \int_{\partial B_1(1)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz \qquad f)\ \int_{\partial B_r(0)} \frac{\sin(z)}{(a-z)^2} dz,$$

worin $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $|a| \neq r$.
Hinweise: 1. Fasse a) als geeignetes Wegintegral auf. 2. Für einige der Integrale wirst du einen Satz aus der kommenden Vorlesung (Do, 12.6.) benötigen.

Hausaufgabe 4: 5 Punkte

Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) \neq 0$. Ferner sei $r > 0$ so gewählt, dass z_0 die einzige Nullstelle von f in $\overline{B_r(z_0)}$ ist. Zeige:

$$\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{f(z)} dz = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}.$$