Michael Winkler
Johannes Lankeit

8.4.2014

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 1. Übung

Hausaufgabe 1: 9 Punkte

a) Berechne

$$i)\,\mathrm{Re}\left(\frac{4-i}{2}+\frac{i-4}{4i+1}\right), \qquad ii)\,\mathrm{Im}((2-3i)(5+8i)),$$

$$iii)\,\mathrm{Im}\left(i^{42}\mathrm{Im}\left(i\frac{21i}{i-27}+\left(\frac{7-9i}{8i+2}\right)^4-3i+(8-i)(\frac{4-13i}{9}-\frac{1}{i})\right)\right).$$

b) Beweise oder widerlege: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{w+z}=\overline{w}+\overline{z}, \qquad \overline{wz}=\overline{w}\cdot\overline{z}, \qquad |wz|=|w||z|,$$

$$\mathrm{Re}(w)\le|w|, \qquad |z|=|\overline{z}|, \qquad z^2+2zw+w^2>0.$$

Lösung:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{4-i}{2}+\frac{i-4}{4i+1}\right)=\mathrm{Re}(2)-\mathrm{Re}(\frac{i}{2})+\mathrm{Re}\left(\frac{(i-4)(4i-1)}{(4i+1)(4i-1)}\right)=2-0+\mathrm{Re}\left(\frac{-4-i-16i+4}{-16-1}\right)=2.$$

$$\mathrm{Im}((2-3i)(5+8i))=\mathrm{Im}(10-15i+16i-24i^2)=\mathrm{Im}(34+i)=1$$

Der Imaginärteil einer komplexen Zahl ist reell, Multiplikation mit $i^{42}=(i^4)^{10}i^2=-1$ ändert daran nichts. Der Imaginärteil einer reellen Zahl ist 0. Daher:

$$\mathrm{Im}\left(i^{42}\mathrm{Im}\left(i\frac{21i}{i-27}+\left(\frac{7-9i}{8i+2}\right)^4-3i+(8-i)(\frac{4-13i}{9}-\frac{1}{i})\right)\right)=0.$$

Seien $w=u+iv$, $z=x+iy$ mit $u,v,x,y\in\mathbb{R}$.

$$\overline{w+z}=\overline{u+iv+x+iy}=\overline{(u+x)+i(v+y)}=(u+x)-i(v+y)=u-iv+x-iy=\overline{w}+\overline{z}$$

$$\overline{wz}=\overline{(u+iv)(x+iy)}=\overline{ux-vy+ivx+iuy}=ux-vy-ivx-ivy=(u-iv)(x-iy)=\overline{w}\cdot\overline{z}$$

$$\begin{aligned}|wz|=&|ux-vy+iuy+ivx|=\sqrt{(ux-vy)^2+(uy+vx)^2}\\=&\sqrt{u^2x^2+v^2y^2-2uvxy+u^2y^2+v^2x^2+2uvxy}=\sqrt{(u^2+v^2)(x^2+y^2)}=|w||z|\end{aligned}$$

Wenn man die Formel $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$ verwendet, geht es unter Verwendung des letzten Punktes auch so:

$$|wz|^2=wz\overline{wz}=wz\overline{w}\overline{z}=w\overline{w}z\overline{z}=|w|^2|z|^2$$

$$\mathrm{Re}(w)\le|w| \iff u\le\sqrt{u^2+v^2},$$

das ist wegen $v^2\ge0$ und $u\le|u|=\sqrt{u^2}$ erfüllt.

$$|z|=|\overline{z}| \iff \sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{x^2+(-y)^2}$$

Ja, offensichtlich. ($(-1)^2=1$).

$z=i, w=0$ würde auf $-1+0>0$ führen. Abgesehen davon ist $>$ bei nicht notwendigerweise reellen Zahlen nicht erklärt.

Hausaufgabe 2: 4 Punkte

Skizziere die folgenden Mengen:

$$\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z) > -1\}, \qquad \{z \in \mathbb{C};\ |\overline{z} - 4 - i| = 1\}.$$

Lösung:
Hier soll gezeichnet werden. Hinweise:
Bei $(-1,-1)$ beginnend verläuft der Rand der ersten Menge diagonal (mit Steigung 1) nach rechts oben, sowie parallel zur $x-$Achse nach rechts.
Die zweite Menge ist ein Kreis(rand) mit Radius 1. Der Mittelpunkt wäre $4+i$, wenn dort z statt $\overline{z}$ stünde; ist so also (Konjugation entspricht Spiegelung an der $x-$Achse) $4-i$.

Hausaufgabe 3: 6 Punkte

Bestimme den Abschluss und das Innere der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$a)\ \{z \in \mathbb{C}; |z-1| < 2\}, \qquad b)\ \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, \qquad c)\ \mathbb{R}.$$

Dabei ist für $A, B \subset \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ der Ausdruck $A + zB$ als $\{a + z \cdot b;\ a \in A, b \in B\}$ zu verstehen.

Lösung:
Das Innere und der Abschluss *in der Topologie von* $\mathbb{C}$ sind jeweils:

a) Diese Menge ist offen. (Sei z eines ihrer Elemente, also $|z-1| < 2$. Setze $r = \frac{2-|z-1|}{2}$; dann ist $B_r(z) \subset \{\xi \in \mathbb{C};\ |\xi - 1| < 2\}$.) Sie ist also gleich ihrem Inneren. (PA 8a)
Ihr Abschluss ist $B = \{z \in \mathbb{C}; |z-1| \leq 2\}$. Denn B enthält offenbar die zu untersuchende Menge und ist selbst abgeschlossen (als Urbild von $[0,2]$ unter der stetigen Funktion $f\colon \mathbb{C} \to [0,\infty)$ mit $f(z) = |z-1|$), enthält also den Abschluss. Außerdem ist jedes Element von B ein Häufungspunkt der gesuchten Menge ($(1-\frac{1}{n})z \to z$) und PA 8 c) besagt, dass damit B Teilmenge des Abschlusses sein muss.

b) Das Innere dieser Menge ist leer. Jede Kugel $B_\varepsilon(z)$ enthält einen Punkt mit einer irrationalen Koordinaten. (Weil zwischen je zwei rationalen Zahlen immer eine irrationale Zahl liegt, siehe Analysis I.)
Der Abschluss ist gleich ganz $\mathbb{C}$, denn jedes $z = x+iy \in \mathbb{C}$ ist Häufungspunkt dieser Menge. (Weil $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt, gibt es je eine Folge rationaler Zahlen $x_n \to x$ und $y_n \to y$; dann konvergiert auch $x_n + iy_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ gegen z.)

c) $\overline{R} = \mathbb{R}$, denn $\mathbb{R}$ ist (als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Funktion Im) abgeschlossen.
$\mathbb{R}^\circ = \emptyset$, denn für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ ist $x + \varepsilon i \notin \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 4: 8 Punkte

Sind die folgenden Mengen zusammenhängend?

$$a)\ \mathbb{C}, \qquad b)\ \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\} \qquad c)\ [2+i, 3] \cup [3+i, 4] \qquad d)\ [2+i, 3] \cup [3, 4+i]$$

Lösung:

a) $\mathbb{C}$ ist offen, Präsenzaufgabe 14 anwendbar; Teil b): Zu $x, y \in \mathbb{C}$ wähle $[x, y]$ als verbindenden Polygonzug.

b) Die Menge $M = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ ist mit demselben Argument wie in a) zusammenhängend (dass für $x, y \in M$ auch $[x, y]$ gänzlich in M enthalten ist, sieht man schnell); Präsenzaufgabe 11 mit $A = M$ und $B = \overline{A} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ liefert dann die Behauptung.

c) Nicht zusammenhängend. $U = [2+i, 3]$, $V = [3+i, 4]$. Disjunkt, Vereinigung gleich gesuchter Menge, nichtleer: klar. Je relativ offen: Es handelt sich um den Schnitt der gesuchten Menge mit (beispielsweise) der offenen Menge $\{z \in \mathbb{C};\ \frac{7}{2} - \mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)\}$ bzw. $\{z \in \mathbb{C};\ \frac{7}{2} - \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z)\}$.

d) Polygonzug. Siehe HA 5.

Hausaufgabe 5: 9 Punkte

Beweise oder widerlege:

a) Ist $A \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend und $f\colon A \to \mathbb{C}$ stetig, so ist $f(A)$ zusammenhängend.

b) Ist $A \subset \mathbb{C}$ und $f\colon A \to \mathbb{C}$ stetig sowie $f(A)$ zusammenhängend, so ist A zusammenhängend.

c) Jeder Polygonzug ist zusammenhängend.

Lösung:

a) Sei $f(A) = U \cup V$ mit (in $f(A)$) offenen Mengen U, V, sodass $U \cap V = \emptyset$. Dann sind auch $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offen in A (Stetigkeit von f). Ferner ist $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(f(A)) \supset A$ (also hier $= A$) und $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ (läge x in diesem Schnitt, wäre auch $f(x) \in f(f^{-1}(U)) \cap f(f^{-1}(V)) = U \cap V = \emptyset$). Weil A zusammenhängend ist, muss also $f^{-1}(U) = \emptyset$ (oder $f^{-1}(V) = \emptyset$) gelten, d.h. $U = \emptyset$ (oder $V = \emptyset$) – und damit ist schließlich $f(A)$ zusammenhängend.

b) Falsch. A unzusammenhängend, z.B. $\{0, 1\}$, konstante Nullfunktion.

c) Gegeben sei der Polygonzug P, der die Punkte $z_0, z_1, \ldots, z_n$ wie in der Definition verbinde.

Falls $n = 1$, handelt es sich um das stetige Bild von $[0, 1]$ unter der Abbildung $f(t) = z_0 + t \cdot (z_1 - z_0)$, das also (nach a) zusammenhängend ist.

Handelt es sich bei dem Polygonzug $z_0, \ldots, z_n$ bereits um eine zusammenhängende Menge, so folgt daraus, dass (mit demselben Argument wie für $n = 1$ verwendet) $[z_n, z_{n+1}]$ auch zusammenhängend ist und diese beiden Mengen sich in z_n schneiden, dass auch ihre Vereinigung, der Polygonzug $z_0, \ldots, z_n, z_{n+1}$, zusammenhängend ist. (Präsenzaufgabe 10)

Per Induktion über die Anzahl der Punkte folgt damit die Behauptung.

Man kann auch direkt argumentieren, dass der Polygonzug das stetige Bild von $[0, 1]$ ist, muss dann aber eine passende Abbildung angeben und sich von ihrer Stetigkeit überzeugen.