Michael Winkler
Johannes Lankeit

17.6.2014

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 10. Übung

Hausaufgabe 1: 3 Punkte

Es sei f eine nichtkonstante ganze Funktion und $w \in \mathbb{C}$.
Zeige: Es gibt eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ derart, dass $f(z_n) \to w$.

Lösung:
Angenommen, es gäbe keine derartige Folge; dann existierte also $\delta > 0$ derart, dass $|f(z) - w| > \delta$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Damit aber wäre $z \mapsto \frac{1}{f(z)-w}$ nicht nur (wegen der Nullstellenfreiheit des Nenners) auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, sondern eben auch (durch $\frac{1}{\delta}$) beschränkt und damit nach Liouville konstant. Nach Umstellen würde auch Konstanz von f folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Hausaufgabe 2: 2 Punkte

Gib entweder (mit Nachweis dieser Eigenschaften) eine holomorphe, surjektive Funktion $f\colon \mathbb{C} \to B_1(0)$ an oder belege die Nichtexistenz.

Lösung:
Wegen $f(\mathbb{C}) \subset B_1(0)$ wäre also f beschränkt (durch 1), nach Liouville also konstant - im Widerspruch zur Surjektivität. Eine solche Funktion kann es also nicht geben.

Hausaufgabe 3: 2+2+2 Punkte

Finde jeweils alle holomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die für alle $n \in \mathbb{N}$ Folgendes erfüllen:

$$a)\ f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}, \qquad b)\ f^{(n)}(0) = (n!)^3, \qquad c)\ f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}.$$

(Oder, falls es solche Funktionen nicht gibt, begründe dies.)

Lösung:
a) $f(z) = z^2$, wegen Satz 6.3 (bzw. Argumenten wie in Präsenzaufgaben 2 und 5) gibt es auch keine weitere.
b) Geht nicht. Diese Funktion müsste nach Satz 6.2 mit der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (n!)^2$ übereinstimmen, die aber nicht in ganz $\mathbb{C}$ konvergiert.
c)$f(\frac{2}{n}) = \frac{1}{n}$ verlangt $f(z) = \frac{1}{2}z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ – das aber widerspricht der zweiten Bedingung. Geht nicht.

Hausaufgabe 4: 1+3+3 Punkte

Sei G ein sternförmiges Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ohne Nullstelle. Beweise:

a) Dann ist auch $\frac{f'}{f}$ holomorph.

b) Es existiert eine holomorphe Funktion $h\colon G \to \mathbb{C}$, sodass für alle $z \in G$ gilt $e^{h(z)} = f(z)$.

(Diese Aussage haben wir in Hausaufgabe 6 auf Blatt 6 schon verwendet.)

Bestimme nun alle ganzen Funktionen f, g mit

$$f^2 + g^2 = 1.$$

Zeige dazu zunächst, dass $f + ig = e^{ih}$ mit einer ganzen Funktion h ist.

Lösung:
Da wir nun endlich (Folgerung aus der allgemeinen Cauchyschen Integralformel) wissen, dass auch die Ableitungen holomorpher Funktionen wieder holomorph sind, ist a) schnell klar.
Mit z_0 als Sternzentrum des Gebiets wird durch

$$h(z) = \int_{[z_0,z]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + Ln(f(z_0))$$

eine holomorphe Funktion mit Ableitung $h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ definiert. (Hierbei bezeichne $Ln(f(z_0))$ irgendeinen Logarithmus von $f(z_0) \neq 0$.)
Betrachte nun die Ableitung von

$$z \mapsto f(z)e^{-h(z)},$$

d.h.

$$f'(z)e^{-h(z)} + f(z)e^{-h(z)}(-1)h'(z) = f'(z)e^{-h(z)} - f(z)e^{-h(z)}\frac{f'(z)}{f(z)} = 0,$$

also ist $f(z)e^{-h(z)}$ konstant und demnach gleich

$$f(z_0)e^{-h(z_0)} = f(z_0)e^{-\int_{[z_0,z_0]}\cdots - Ln(f(z_0))} = f(z_0)(f(z_0))^{-1} = 1$$

– es folgt $f(z) = e^{h(z)}$.

Wegen $1 = f^2 + g^2 = (f + ig)(f - ig)$ ist sicherlich stets $f + ig$ von 0 verschieden. Daher gibt es nach dem ersten Teil der Aufgabe eine ganze Funktion $\widetilde{h}$ derart, dass

$$f + ig = e^{\widetilde{h}},$$

setze also $h = \frac{1}{i}\widetilde{h}$, um die Aussage zu erhalten.

Nun lässt sich wegen $f - ig = \frac{1}{f+ig}$ (Folgerung aus $f^2 + g^2 = 1$) g darstellen als

$$g = \frac{f + ig - (f - ig)}{2i} = \frac{e^{ih} - e^{-ih}}{2i} = \sin \circ h$$

und entsprechend $f = \cos \circ h$.

Dass nun für jede ganze Funktion h auch $f = \cos \circ h$, $g = \sin \circ h$ erfüllen, dass $f^2 + g^2 = 1$, ist nach 3.11 e) offensichtlich.

Die gesuchten Funktionen f, g sind also gerade all die Funktionenpaare, die sich als $(\cos \circ h, \sin \circ h)$ mit einer ganzen Funktion h darstellen lassen.

Hausaufgabe 5: 2+4 Punkte

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \{0, \ldots, n\}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$. Berechne $\int_{\partial B_2(i)} \frac{f(\xi)}{\xi^m} d\xi$ für jedes $m \in \mathbb{N}$.

(b) Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $R, M > 0$ existieren mit $\left|\int_{\partial B_R(z)} \frac{\cos(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi\right| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus B_{2R}(0)$?

Lösung:

(a) Da $0 \in B_2(i)$ gilt und f holomorph in $\mathbb{C}$ ist, gilt nach der allgemeinen Cauchy-Integralformel für $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{\partial B_2(i)} \frac{f(\xi)}{\xi^m} d\xi = \int_{\partial B_2(i)} \frac{f(\xi)}{(\xi - 0)^m} d\xi = \frac{2\pi i}{(m-1)!} \cdot f^{(m-1)}(0).$$

Für $m = 1$ gilt $f^{(0)}(0) = f(0) = a_0 = 0! \cdot a_0$. Für $m \in \{2, \dots, n+1\}$ gilt wegen $0^0 = 1$

$$\begin{aligned} f^{(m-1)}(0) &= \sum_{k=m-1}^{n} a_k \cdot k(k-1)\dots(k-(m-2)) \cdot 0^{k-(m-1)} \\ &= a_{m-1} \cdot (m-1)(m-2)\dots 1 \cdot 0^0 = a_{m-1} \cdot (m-1)! \cdot 1 \\ &= a_{m-1} \cdot (m-1)!\,. \end{aligned}$$

Für $m \geq n+2$ gilt offenbar $f^{(m-1)} \equiv 0$ in $\mathbb{C}$, da f ein Polynom vom Grad höchstens n ist. Somit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_2(i)} \frac{f(\xi)}{\xi^m}\, d\xi &= \frac{2\pi i}{(m-1)!} \cdot f^{(m-1)}(0) \\ &= \begin{cases} 2\pi i \cdot a_{m-1}, & \text{falls } m \in \{1, \dots, n+1\}, \\ 0, & \text{falls } m \in \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n+1\}. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Angenommen, es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $R, M > 0$ existieren mit $\left| \int_{\partial B_R(z)} \frac{\cos(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi \right| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus B_{2R}(0)$. Da $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \cos(z)$ für $z \in \mathbb{C}$, auf $\mathbb{C}$ holomorph ist, gilt dann nach der allgemeinen Cauchy-Integralformel

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(z) \right| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{\partial B_R(z)} \frac{\cos(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi \right| \\ &= \frac{n!}{2\pi} \cdot \left| \int_{\partial B_R(z)} \frac{\cos(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi \right| \leq \frac{Mn!}{2\pi} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus B_{2R}(0). \end{aligned}$$

Wegen

$$f^{(n)}(z) = \begin{cases} (-1)^k \cos(z), & \text{falls } n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ (-1)^k \sin(z), & \text{falls } n = 2k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{1}$$

ist $f^{(n)}$ holomorph und damit insbesondere stetig in $\mathbb{C}$. Da $\overline{B_{2R}(0)}$ kompakt ist, gibt es $c > 0$ mit

$$|f^{(n)}(z)| \leq c \qquad \text{für alle } z \in \overline{B_{2R}(0)}.$$

Daher folgt

$$|f^{(n)}(z)| \leq \max\left\{c, \frac{Mn!}{2\pi}\right\} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Also ist $f^{(n)}$ eine beschränkte ganze Funktion und somit nach dem Satz von Liouville konstant. Dies ist ein Widerspruch zu (1). Somit war die Annahme falsch und es gibt kein solches $n \in \mathbb{N}$.

Hausaufgabe 6: 7 Punkte

Beweise:
Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Gibt es dann ein $z_0 \in G$ mit

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| =: M \qquad \forall z \in G,$$

so ist f konstant.
Zeige dazu zunächst $|f| \equiv \mathit{const}$ in G, indem du
a) für die Menge

$$A := \{z \in G;\ |f(z)| = |f(z_0)| = M\}$$

mit Hilfe der Mittelwertformel in 5.12 nachweist, dass sie offen ist, und
b) feststellst, dass auch $G \setminus A$ offen ist.
(Vergiss nicht, auch zu argumentieren, wie $|f| \equiv \mathit{const}$ aus a) und b) folgt.)
Zeige nun $f' \equiv 0$ in G.
Dazu folgere aus dem bisher Gezeigten für geeignete Funktionen $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dass $u^2 + v^2 = \mathit{const.}$ und schließe durch Ableiten „nach x und y" und gegebenenfalls unter reichlicher Zuhilfenahme des zweiten Kapitels, dass

$$f'\overline{f} \equiv 0$$

in G ist.
Weise abschließend sowohl im Fall $|f(z_0)| = 0$ als auch für $|f(z_0)| > 0$ die Behauptung nach.

Lösung:
Sei $\widetilde{z} \in G$ und $R > 0$ mit $\overline{B}_R(\widetilde{z}) \subset G$. Nach 5.12 ist dann für $r \in (0, R)$

$$M = |f(\widetilde{z})| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(\widetilde{z} + re^{it}) dt \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\widetilde{z} + re^{it})| dt \le \frac{1}{2\pi} 2\pi M = M,$$

also

$$\int_0^{2\pi} |f(\widetilde{z} + re^{it})| dt = 2\pi M.$$

Wegen $|f| \le M$ und Stetigkeit von f kann Gleichheit hier nur Auftreten, falls $f \equiv M$ auf ganz $\partial B_r(\widetilde{z})$ und damit (wegen der beliebigen Wahl von $r \in (0, R)$) auf ganz $B_R(\widetilde{z})$.
Etwas detaillierter:

$$\begin{aligned} 0 =& 2\pi M - \int_0^{2\pi} |f(\widetilde{z} + re^{it})| dt \\ =& \int_0^{2\pi} M - |f(\widetilde{z} + re^{it})| dt \\ =& \int_0^{2\pi} |M - |f(\widetilde{z} + re^{it})|| dt \end{aligned}$$

und deshalb $|f(\widetilde{z} + re^{it})| = M$ für alle $t \in [0, 2\pi]$.
Schließlich erhalten wir jedenfalls $B_R(\widetilde{z}) \subset A$.

$G \setminus A$ ist ofen, weil $|f|$ stetig und $G \setminus A = f^{-1}((-\infty, M))$ das Urbild einer offenen Menge ist.
Insbesondere ist damit A abgeschlossen.

Da G zusammenhängend ist, ist damit entweder $A = \emptyset$ oder $A = G$. – Ersteres können wir wegen $z_0 \in A$ ausschließen - und damit muss $|f| \equiv |f(z_0)|$ auf G sein. Dass der Betrag konstant ist, reicht uns natürlich nicht.

Mit $u = \mathrm{Re} f$ und $v = \mathrm{Im} f$ (wie überraschend!) ist also

$$u^2 + v^2 = |f|^2 \equiv const.$$

und nach Ableiten

$$uu_x + vv_x = 0 \qquad \text{sowie} \qquad uu_y + vv_y = 0.$$

Nach Satz 2.5 ist $f' = u_x + iu_y$ und damit (gemäß den CRDGen und der letzten Rechnung)

$$f'\overline{f} = (u_x + iv_x)(u - iv) = uu_x + iuv_x - ivu_x + vv_x = uu_x + vv_x + iu(-u_y) - ivv_y = 0 - i \cdot 0 = 0.$$

Falls $|f| \equiv M = |f(z_0)| = 0$, folgt sowieso $f \equiv 0$; andernfalls ist wegen $|\overline{f}| = |f| = M \ne 0$ nach Division durch $\overline{f} \ne 0$ auch $f' = 0$ und es folgt, dass f auf G konstant ist.