Michael Winkler
Johannes Lankeit

24.6.2014

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 11. Übung

Hausaufgabe 1: 3 Punkte

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf G holomorph sei. Es konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf ∂G gleichmäßig.
Zeige: f_n konvergiert auf ganz $\overline{G}$ gleichmäßig gegen eine stetige, auf G holomorphe Funktion.

Tipp: Cauchyfolge.

Lösung:
Für jedes $m, n \in \mathbb{N}$ ist $f_n - f_m$ eine holomorphe Funktion, die ihr (betragliches) Maximum (gemäß Maximumsprinzip) auf dem Rand annimmt. Damit bilden die f_n eine Cauchyfolge bzgl. der Supremumsnorm auf $\overline{G}$. Also konvergieren die f_n gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$, die (als gleichmäßiger Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen) stetig ist. Holomorphie folgt aus dem „Weierstraßschen Konvergenzsatz" (Präsenzaufgabe).

Hausaufgabe 2: 4+8 Punkte

Auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sei die lokal beschränkte Familie (:= Menge) $\mathcal{F} \subset H(G)$ holomorpher Funktionen gegeben. „Lokal beschränkt" bedeutet dabei, dass es zu jedem Punkt in G eine Umgebung gibt, auf der die Funktionen aus $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt sind, in Zeichen:

$$\forall\, z_0 \in G\ \exists\, C > 0\ \exists\, r > 0\ \forall\, z \in B_r(z_0)\ \forall\, f \in \mathcal{F} \qquad |f(z)| \le C.$$

Zeige: Zu jedem Punkt $z_0 \in G$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Kreisscheibe $B_\delta(z_0) \subset G$ mit

$$|f(w) - f(z)| \le \varepsilon \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{F} \quad \text{und für alle } w, z \in B_\delta(z_0),$$

lokal ist $\mathcal{F}$ also gleichgradig gleichmäßig stetig.

Tipp: Cauchy-Integralformel über den Rand von $B_{2r}(z_0)$. Hier ist $|\zeta - z||\zeta - w| \ge r^2$.

Beweise anhand dieser gleichgradigen Stetigkeit nun, dass jede Funktionenfolge aus $\mathcal{F}$ eine in G kompakt konvergente Teilfolge enthält.

Tipp: Für welchen Satz aus Analysis II brauchte man gleichgradige Stetigkeit?

Lösung:
Sei $\varepsilon > 0$, sei $z_0 \in G$.
C und r seien so gewählt, dass $\overline{B_{2r}(z_0)} \subset G$ (möglich, da G offen) und dass für alle $\zeta \in B_{2r}(z_0)$ und alle $f \in \mathcal{F}$ gilt $|f(\zeta)| \le C$. (Das ist nach der vorausgesetzten gleichmäßigen Beschränktheit möglich.)
Wähle $\delta < \min\{\frac{\varepsilon r}{4\pi C}, r\}$. Seien $z, w \in B_\delta(z_0) \subset B_r(z_0)$. Dann ist (nach CIF, Hinweis und Standardabschätzung sowie der Wahl von δ)

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(w)| =& \left| \int_{\partial B_{2r}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta \right| \\
\le& C \int_{\partial B_{2r}(z_0)} \left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right| d\zeta \\
=& C \int_{\partial B_{2r}(z_0)} \frac{|z - w|}{|\zeta - z||\zeta - w|} d\zeta \\
\le& C |z - w| \frac{1}{r^2} 4r\pi \\
\le& \frac{4\pi C}{r} \delta < \varepsilon
\end{aligned}$$

Sei $K \subset G$ eine kompakte Menge. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{F}$ auf K gleichgradig stetig ist: Angenommen, das wäre nicht der Fall, es gäbe also $\varepsilon > 0$ sodass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ $w_n, z_n \in G$ und $f_n \in \mathcal{F}$ gäbe mit $|w_n - z_n| < \frac{1}{n}$ und $|f_n(w_n) - f_n(z_n)| > \varepsilon$. Da K kompakt, wären w_n und z_n oBdA konvergent gegen denselben Grenzwert z_0 (da $|w_n - z_n| < \frac{1}{n}$). Zu z_0 und ε gäbe es aber nach dem soeben Gezeigten ein $\delta > 0$ mit $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$ für alle $w, z \in B_\delta(z_0)$ und alle $f \in \mathcal{F}$.

Für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ wären aber $w_n, z_n \in B_\delta(z_0)$, also müsste für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $\varepsilon < |f_n(w_n) - f_n(z_n)| < \varepsilon$ gelten; ein Widerspruch.

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nun eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{F}$. Diese Folge ist gleichgradig stetig und punktweise (d.h. für jedes feste Argument) beschränkt (nach der Voraussetzung der lokalen Beschränktheit sogar immer in einer Umgebung eines Punktes und nicht nur im Punkt selbst).

Der Satz von Arzela-Ascoli garantiert also die Existenz einer (auf K) gleichmäßig konvergenten Teilfolge.
Damit allerdings die gefundene Teilfolge auf jeder kompakten Teilmenge gleichmäßig konvergiert und nicht nur für jede kompakte Teilmenge eine konvergente Teilfolge existiert, gehen wir folgendermaßen vor:
Wir wählen eine aufsteigende Folge K_n kompakter Mengen (also $K_n \subset K_{n+1}$) in G, sodass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = G$, nämlich $K_n = \overline{B_n(0)} \cap \{z \in G; \operatorname{dist}(z, \partial G) \geq \frac{1}{n}\}$.
Nach den eben angestellten Überlegungen finden wir eine Teilfolge $f_{1,1}, f_{1,2}, \ldots$, die auf K_1 gleichmäßig konvergiert.
Diese wiederum hat (aus denselben Gründen) eine Teilfolge $f_{2,1}, f_{2,2}, \ldots$, die auf K_2 gleichmäßig konvergiert.
Sukzessive wählen wir so für $k \in \mathbb{N}$ jeweils eine Teilfolge $f_{k,1}, f_{k,2}, \ldots$ von $f_{k-1,1}, f_{k-1,2}, \ldots$, die auf K_k gleichmäßig konvergiert.

Die Folge $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also auf jeder der Mengen K_n gleichmäßig. Und da jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ in einer der Mengen K_n enthalten ist, konvergiert $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ also auf K gleichmäßig und daher auf G kompakt.

(Ein solches Verfahren der Diagonalfolgenauswahl war auch im Beweis des Satzes von Arzela-Ascoli zentral.)

Hausaufgabe 3: 3 Punkte

$U \subset \mathbb{C}$ sei Gebiet. Der Betrag der holomorphen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ habe an der Stelle $z_0 \in U$ ein lokales Minimum. Zeige: $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant.

Lösung:

Es sei $r > 0$ so gewählt, dass für alle $z \in B_r(z_0)$ gilt $|f(z)| \geq |f(z_0)|$. Angenommen, $f(z_0) \neq 0$, also (wegen der Ungleichung) f nullstellenfrei in $B_r(z_0)$ und damit definiert $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ eine holomorphe Funktion $g\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$. Insbesondere hat $|g|$ ein Maximum in z_0. Nach dem Maximumprinzip (Blatt 10, HA 6) ist also g konstant (auf $B_r(z_0)$) und damit auch f (zunächst auf $B_r(z_0)$ – damit aber nach dem Identitätssatz auf ganz U).

Hausaufgabe 4: 6 Punkte

$f\colon G \to \mathbb{C}$ sei eine nichtkonstante holomorphe Funktion auf dem Gebiet G. Zeige: $f(G)$ ist ein Gebiet. Zeige dazu:

a) $f(G)$ ist zusammenhängend.

b) Zu $w_0 = f(z_0) \in f(G)$ gibt es $r > 0$, sodass f in $\overline{B_r(z_0)}$ nur in z_0 den Wert w_0 annimmt.

c) Es gibt $\delta > 0$, sodass $|f - w_0| \geq \delta$ auf $\partial B_r(z_0)$.

d) Für $|w - w_0| < \frac{\delta}{2}$ hat $z \mapsto f(z) - w$ ein Betragsminimum irgendwo im Innern von $B_r(z_0)$ und nicht auf dem Rand dieser Menge. (Tipp: $z = z_0$.)

e) $f - w$ hat eine Nullstelle in $B_r(z_0)$.

f) $f(G)$ ist offen.

Lösung:

a) Übung 1, HA 5: Stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge.

b) Wäre das nicht der Fall, würden sich die Nullstellen der Funktion $f - w_0$ in $z_0 \in G$ häufen, nach Satz 6.3 wäre also f konstant gleich w_0.

c) $f - w_0$ hat nach b) keine Nullstelle auf $\partial B_r(z_0)$, nimmt als stetige Funktion auf dieser kompakten Menge aber natürlich das Minimum (nennen wir es δ) an.

d) $|f - w|$ ist stetig, nimmt also auf $\overline{B_r(z_0)}$ ein Minimum an. Auf dem Rand ist nach c)

$$|f - w| = |f - w_0 + w_0 - w| \geq |f - w_0| - |w_0 - w| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2},$$

aber an der Stelle $z = z_0$ ist $|f - w|$ kleiner:

$$|f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \frac{\delta}{2}.$$

Daher liegt das Minimun nicht auf dem Rand.

e) Minimumprinzip (Hausaufgabe 3): Minimum liegt nach d) im Innern von $B_r(z_0)$ und daher gibt es eine Nullstelle in $B_r(z_0)$.

f) Sei $w_0 \in f(G)$. Dann ist auch $B_{\frac{\delta}{2}}(w_0) \subset f(G)$, denn $f - w$ hat für $w \in B_{\frac{\delta}{2}}(w_0)$ eine Nullstelle $z \in B_r(z_0)$, sodass also $w = f(z) \in f(G)$ nach e).

Da $f(G)$ also offen nach f) und zusammenhängend nach a), ist $f(G)$ ein Gebiet.

Hausaufgabe 5: 4 Punkte

1. p sei ein nichtkonstantes Polynom. Folgere aus $\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \infty$, dass $p(\mathbb{C})$ abgeschlossen ist.
2. Verwende diese Aussage und die vorhergehende Aufgabe, um den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen.

Lösung:
1. Sei $w \in \mathbb{C}$ Häufungspunkt von $p(\mathbb{C})$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Folge, sodass $p(z_n) \to w$. Mit $p(z_n)$ ist (wegen des Wachstumsverhaltens von p, siehe angegebene Grenzwertaussage) auch $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, sodass eine konvergente Teilfolge $z_{n_k} \to z_0$ existiert, also (p ist stetig) $w \leftarrow p(z_n) \to p(z_0)$ und somit $w \in p(\mathbb{C})$.
Sei p nichtkonstantes Polynom.
Nach 1. ist $p(\mathbb{C})$ abgeschlossen, nach der vorangegangenen Aufgabe ein Gebiet und sicherlich nicht leer, also (Blatt 1, PA 9) gleich $\mathbb{C}$. Damit ist $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv, also hat p insbesondere eine Nullstelle.

Hausaufgabe 6: 2+4 Punkte

a) Gegeben sei $\zeta \in \partial B_1(0)$. Finde eine auf $B_1(0)$ holomorphe Funktion $f \not\equiv 0$, deren Nullstellen sich in ζ häufen.
b) Für welche offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$ mit $B_1(0) \subset U$ ist die Restriktionsabbildung

$$\mathcal{R}\colon H(U) \to H(B_1(0)), \qquad f \mapsto f|_{B_1(0)},$$

die also auf U holomorphe Funktionen auf ihre Einschränkung auf $B_1(0)$ abbildet, surjektiv?
(Betrachte die Fälle „U zusammenhängend“ und „U nicht zusammenhängend“ getrennt.)

Lösung:
1.Ähnlich wie in Präsenzaufgabe 5c) auf dem letzten Übungsblatt betrachten wir

$$f(z) = \sin(\frac{\pi\zeta}{z-\zeta}).$$

Die Nullstellen dieser Funktion sind gerade die Stellen z mit $\frac{\pi\zeta}{z-\zeta} = n\pi$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, d.h. $\zeta = nz - n\zeta$, also $z = (1 + \frac{1}{n})\zeta$ für $n \in \mathbb{Z}$. (Für negative n liegen diese Stellen in $B_1(0)$ und häufen sich in ζ.)
Offenbar ist $f \not\equiv 0$ und holomorph auf $B_1(0)$.

2. Falls U zusammenhängend ist, ist $\mathcal{R}$ nur surjektiv, falls $U = B_1(0)$.
Für zusammenhängende $U \supsetneq B_1(0)$ gäbe es $\zeta \in U \cap \partial B_1(0)$ und die in 1. konstruierte Funktion ist holomorph in $B_1(0)$, lässt sich aber nicht holomorph auf U fortsetzen: Jede solche Fortsetzung müsste nach dem Identitätssatz (genauer: Satz 6.3) gleich 0 sein.

Dasselbe gilt für unzusammenhängende Obermengen von $B_1(0)$, in denen $B_1(0)$ keine Zusammenhangskomponente ist.

Falls U eine nicht zusammenhängende Obermenge von $B_1(0)$ ist und $B_1(0)$ eine Zusammenhangskomponente von U, so ist $\mathcal{R}$ surjektiv. Dann nämlich wird zu $f \in H(B_1(0))$ durch

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in B_1(0) \\ 0, & z \in U \setminus B_1(0) \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion definiert, deren Einschränkung auf $B_1(0)$ mit f übereinstimmt.