Michael Winkler
Johannes Lankeit

4.7.2014

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 13. Übung

Hausaufgabe 1: 3+3 Punkte

Entwickele jeweils f in eine Laurentreihe in $A_{r,R}(z_0)$.

(a) $f(z) := z\sin(\frac{1}{z+2})$, $z_0 := -2$, $r := 0$, $R := \infty$;

(b) $f(z) := \frac{z}{(z-1)(z+2)}$, $z_0 := 0$, $r := 0$, $R := 1$ sowie $r := 1$, $R := 2$ sowie $r := 2$, $R := \infty$;

Lösung:

(a) Für $z \in A_{0,\infty}(-2) = \mathbb{C} \setminus \{-2\}$ gilt mit der Definition des Sinus

$$\begin{aligned}
f(z) &= z\sin\left(\frac{1}{z+2}\right) = (z+2-2)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right) \\
&= (z+2)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right) - 2\sin\left(\frac{1}{z+2}\right) \\
&= (z+2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2k+1} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z+2)^{-2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}(z+2)^{-2k-1} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{0}\frac{(-1)^{-k}}{(-2k+1)!}(z+2)^{2k} + \sum_{k=-\infty}^{0}\frac{2(-1)^{-k+1}}{(-2k+1)!}(z+2)^{2k-1}.
\end{aligned}$$

Somit ist die Laurentreihe von f in $A_{0,\infty}(-2)$ gegeben durch $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{0} a_n(z+2)^n$ mit

$$a_n := \begin{cases} \frac{(-1)^{-\frac{n}{2}}}{(-n+1)!}, & \text{falls } n = -2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \\ \frac{2(-1)^{\frac{-n+1}{2}}}{(-n)!}, & \text{falls } n = -2k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

(b) Mit Partialbruchzerlegung gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -2\}$

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+2} = \frac{1}{3(z-1)} + \frac{2}{3(z+2)},$$

denn

$$a = \frac{z}{z+2}\Big|_{z=1} = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad b = \frac{z}{z-1}\Big|_{z=-2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}.$$

Mit der geometrischen Reihe gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\xi^k = \frac{1}{1-\xi}$ für $\xi \in B_1(0)$. Somit folgt für $z \in A_{0,1}(0)$ wegen $|z| < 1$ und $|-\frac{z}{2}| < 1$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{3(z-1)} + \frac{2}{3(z+2)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-z} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})} \\
&= -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}z^k + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3} + \frac{(-1)^k}{3\cdot 2^k}\right)z^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3} + \frac{(-1)^k}{3\cdot 2^k}\right)z^k,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wegen $-\frac{1}{3} + \frac{(-1)^0}{3 \cdot 2^0} = 0$ gilt.

Für $z \in A_{1,2}(0)$ gilt wegen $|\frac{1}{z}| < 1$ und $|-\frac{z}{2}| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3(z-1)} + \frac{2}{3(z+2)} = \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z}{2})} \\ &= \frac{1}{3z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^k = \frac{1}{3z} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3 \cdot 2^k} \cdot z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot z^{-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3 \cdot 2^k} \cdot z^k = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{3} \cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n} \cdot z^n. \end{aligned}$$

Für $z \in A_{2,\infty}(0)$ gilt wegen $|\frac{1}{z}| < 1$ und $|-\frac{2}{z}| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3(z-1)} + \frac{2}{3(z+2)} = \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{2}{3z} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{2}{z})} \\ &= \frac{1}{3z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k + \frac{2}{3z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{z}\right)^k = \frac{1}{3z} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} + \frac{2}{3z} \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k \cdot z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot z^{-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(-2)^{k+1}}{3} \cdot z^{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-(-2)^{k+1}}{3} \cdot z^{-k-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1-(-2)^{-n}}{3} \cdot z^n. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 2: 3+3 Punkte

Es seien $f, g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Hat f in 0 einen Pol und g dort eine wesentliche Singularität, so hat $f+g$ in 0 eine wesentliche Singularität.

(b) f hat genau dann eine wesentliche Singularität in 0, wenn zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert mit $z_k \to 0$ und $|z_k^m f(z_k)| \to \infty$ für $k \to \infty$.

Lösung:

(a) Da f in 0 einen Pol hat, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass f in 0 einen Pol der Ordnung m hat. Nach Proposition 7.16 gilt somit für die Laurentreihen von f und g in $A_{0,\infty}(0) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, dass $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k z^k$ und $g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ mit $b_{k_j} \neq 0$ für eine Folge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ mit $k_j \to -\infty$ für $j \to \infty$ gilt. Nun ist auch $f+g$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph, so dass $(f+g)(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt. Wegen

$$(f+g)(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=-m}^{\infty} (a_k + b_k) z^k + \sum_{k=-\infty}^{-m-1} b_k z^k$$

gilt $c_k = b_k$ für alle $k \leq -m-1$. Wegen $k_j \to -\infty$ für $j \to \infty$ gibt es $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $k_j \leq -m-1$ für alle $j \geq j_0$. Somit gilt $c_{k_j} = b_{k_j} \neq 0$ für alle $j \geq j_0$. Daher hat $f+g$ in 0 nach Proposition 7.16 eine wesentliche Singularität.

(b) „$\Rightarrow$": f habe in 0 eine wesentliche Singularität. Es sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Funktion $h(z) := z^m \cdot f(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, da z^m eine ganze Funktion ist. Es sei nun $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ die Laurentreihe von f in $A_{0,\infty}(0) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gibt es nach Proposition 7.16 eine Folge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ mit $k_j \to -\infty$ für $j \to \infty$ und $a_{k_j} \neq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Nun gilt aber

$$h(z) = z^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^{k+m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n-m} z^n.$$

Somit hat h die Laurentreihe $h(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k$ mit $b_k = a_{k-m}$ für $k \in \mathbb{Z}$. Nun gilt aber $b_{k_j+m} = a_{k_j} \neq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $k_j + m \to -\infty$ für $j \to \infty$. Somit hat h nach Proposition 7.16 eine wesentliche Singularität in 0. Nach dem Satz von Casorati-Weierstraß gibt es daher eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z_k \to 0$ und $|z_k^m f(z_k)| = |h(z_k)| \to \infty$ für $k \to \infty$.

„$\Leftarrow$": Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gebe es eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z_k \to 0$ und $|z_k^m f(z_k)| \to \infty$ für $k \to \infty$.

Sei zunächst $m = 1$. Wegen $|z_k \cdot f(z_k)| \to \infty$ und $z_k \to 0$ für $k \to \infty$ mit einer geeigneten Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ muss $|f(z_k)| \to \infty$ für $k \to \infty$ gelten. Somit hat f in 0 keine hebbare Singularität.

Angenommen, f hat einen Pol in 0. Dann hat f dort einen Pol der Ordnung m für ein $m \in \mathbb{N}$. Nach Definition 7.8 gibt es dann eine ganze Funktion g mit $f(z) = z^{-m} \cdot g(z)$ für $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Dann folgt aber $|z_k^m f(z_k)| = |g(z_k)| \to |g(0)| < \infty$, da g stetig in 0 ist. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl der Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Somit hat f auch keinen Pol in 0 und daher hat f dort eine wesentliche Singularität.

Hausaufgabe 3: 3 Punkte

Die Funktion $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ habe in z_0 einen Pol m-ter Ordnung. Zeige: Dann ist

$$a_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right].$$

Lösung:

Da f in z_0 einen Pol der Ordnung m hat, ist $f(z) = (z-z_0)^{-m} g(z)$ mit einer holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(z) =& (z-z_0)^{-m} g(z) \\ =& (z-z_0)^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \\ =& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-m} \\ =& \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{g^{(l+m)}(z_0)}{(l+m)!}(z-z_0)^l. \end{aligned}$$

Der Koeffizient für $l = -1$, als das Residuum, ist folglich

$$\frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

und da $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ auf einer Umgebung von z_0, folgt damit die Behauptung direkt aus der Stetigkeit von g.

Hausaufgabe 4: 4+4+4 Punkte

Berechne die folgenden Integrale.

(a) $\int_{\partial B_2(0)} \frac{2z^2+7z+11}{z^3+4z^2-z-4}\, dz$,

(b) $\int_{\partial B_2(-2)} \frac{e^{z^2}}{(z+1)^3(z+2)}\, dz$,

(c) $\int_{\partial H} e^{\frac{1}{z}} \cos(\frac{1}{z})\, dz$, wobei ∂H der Rand des Rechteckes mit den in dieser Reihenfolge durchlaufenen Eckpunkten $-2-i$, $3-i$, $3+2i$ und $-2+2i$ sei und H das Innere dieses Rechteckes bezeichne.

Lösung:

(a) Es gilt

$$f(z) := \frac{2z^2+7z+11}{z^3+4z^2-z-4} = \frac{2z^2+7z+11}{(z+4)(z^2-1)} = \frac{2z^2+7z+11}{(z-1)(z+1)(z+4)},$$

so dass f holomorph in $B_3(0)\setminus\{1,-1\}$ ist. Da f in 1 und -1 jeweils einen Pol höchstens erster Ordnung hat, gilt mit dem Residuensatz und Proposition 8.7, da $\partial_{B_2(0)}$ nullhomolog in $B_3(0)$ nach Proposition 8.4 ist und $n(\partial B_2(0),z)=1$ für alle $z\in B_2(0)$ nach Beispiel 4.16 gilt,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_2(0)} f(z)\,dz &= 2\pi i\,(n(\partial B_2(0),1)\cdot res(f;1)+n(\partial B_2(0),-1)\cdot res(f;-1))\\
&= 2\pi i\,(res(f;1)+res(f;-1))\\
&= 2\pi i\left(\frac{1}{0!}\cdot\lim_{z\to 1}\left\{(z-1)^1\cdot f(z)\right\}+\frac{1}{0!}\cdot\lim_{z\to -1}\left\{(z+1)^1\cdot f(z)\right\}\right)\\
&= 2\pi i\left(\lim_{z\to 1}\frac{2z^2+7z+11}{(z+1)(z+4)}+\lim_{z\to -1}\frac{2z^2+7z+11}{(z-1)(z+4)}\right)\\
&= 2\pi i\left(\frac{2+7+11}{2\cdot 5}+\frac{2-7+11}{(-2)\cdot 3}\right)=2\pi i\,(2-1)=2\pi i.
\end{aligned}$$

(b) Mit $f(z) := \frac{e^{z^2}}{(z+1)^3(z+2)}$ ist f holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{-1,-2\}$. Wegen $-1,-2\in B_2(-2)$ und da $\partial B_2(-2)$ nullhomolog in $\mathbb{C}$ nach Proposition 8.4 ist, kann man den Residuensatz auf das zu berechnende Integral anwenden. Nach Beispiel 4.16 gilt weiter $n(\partial B_2(-2),z)=1$ für alle $z\in B_2(-2)$. Somit gilt mit dem Residuensatz

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_2(-2)} f(z)\,dz &= 2\pi i\Big(n(\partial B_2(-2),-1)\cdot res(f;-1)\\
&\qquad +n(\partial B_2(-2),-2)\cdot res(f;-2)\Big)\\
&= 2\pi i\,(res(f;-1)+res(f;-2)).
\end{aligned}$$

Da f in -2 einen Pol höchstens erster Ordnung hat, folgt mit Proposition 8.7

$$res(f;-2) = \frac{1}{0!}\cdot\lim_{z\to -2}\left\{(z+2)^1\cdot f(z)\right\} = \lim_{z\to -2}\frac{e^{z^2}}{(z+1)^3}=\frac{e^4}{(-1)^3}=-e^4.$$

Da f in -1 einen Pol höchstens dritter Ordnung hat, folgt mit Proposition 8.7 und $g(z) := \frac{e^{z^2}}{(z+2)}$

$$res(f;-1) = \frac{1}{2!}\cdot\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left\{(z+1)^3\cdot f(z)\right\}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\frac{e^{z^2}}{(z+2)}=\frac{1}{2}\cdot g''(-1).$$

Nun gilt für $z\in\mathbb{C}\setminus\{-2\}$

$$\begin{aligned}
g'(z) &= \frac{2z\cdot e^{z^2}(z+2)-e^{z^2}\cdot 1}{(z+2)^2}=\frac{(2z^2+4z-1)e^{z^2}}{(z+2)^2},\\
g''(z) &= \frac{[(4z+4)e^{z^2}+(2z^2+4z-1)2z\cdot e^{z^2}](z+2)^2-(2z^2+4z-1)e^{z^2}\cdot 2(z+2)}{(z+2)^4}\\
&= \frac{[(4z+4)e^{z^2}+(2z^2+4z-1)2z\cdot e^{z^2}](z+2)-(2z^2+4z-1)e^{z^2}\cdot 2}{(z+2)^3}\\
&= \frac{[(4z^3+8z^2+2z+4)(z+2)-2(2z^2+4z-1)]e^{z^2}}{(z+2)^3},\\
g''(-1) &= \frac{[(-4+8-2+4)\cdot 1-2(2-4-1)]\cdot e}{1}=12e.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_2(-2)} f(z)\,dz &= 2\pi i\,(res(f;-1)+res(f;-2))=2\pi i\left(\frac{1}{2}\cdot 12e-e^4\right)\\
&= 2\pi i\left(6e-e^4\right).
\end{aligned}$$

(c) Mit $f(z) := e^{\frac{1}{z}}\cos(\frac{1}{z})$ ist f holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Weiter ist ∂H ein geschlossener stückweise glatter Weg in $\mathbb{C}$, so dass ∂H nach Proposition 8.4 nullhomolog in $\mathbb{C}$ ist, da $\mathbb{C}$ sternförmig ist. Es gilt $n(\partial H,z)=1$ für alle $z\in H$. Somit gilt mit dem Residuensatz

$$\int_{\partial H} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot n(\partial H,0)\cdot res(f;0)=2\pi i\cdot res(f;0).$$

Weiter gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Proposition 3.11

$$\begin{aligned}
f(z) &= e^{\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{i\cdot\frac{1}{z}} + e^{-i\cdot\frac{1}{z}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1+i}{z}} + e^{\frac{1-i}{z}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{1+i}{z}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{1-i}{z}\right)^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+i)^k}{2\cdot k!}\cdot z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-i)^k}{2\cdot k!}\cdot z^{-k} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{(1+i)^{-n}+(1-i)^{-n}}{2\cdot(-n)!}\cdot z^n
\end{aligned}$$

Dies ist die Laurentreihe von f in $A_{0,\infty}(0)$. Somit gilt nach Definition 8.1

$$res(f;0) = \frac{(1+i)^{-n}+(1-i)^{-n}}{2\cdot(-n)!}\bigg|_{n=-1} = \frac{(1+i)+(1-i)}{2\cdot 1!} = \frac{2}{2} = 1.$$

Daher folgt

$$\int_{\partial H} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot res(f;0) = 2\pi i.$$

Hausaufgabe 5: 4+4+4 Punkte

Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int_{\partial B_{10}(0)} \left\{\sin\left(\frac{1}{z-2}\right) + \frac{2\sin(z)-3z}{z} + \frac{1}{z^2+4}\right\} dz,$

(b) $\int_{\partial B_3(0)} \frac{e^z}{z^4+2z^3+2z^2}\,dz,$

(c) $\int_{\partial B_4(0)} \frac{z^2}{e^{2z}-1}\,dz.$

Lösung:

(a) Es seien $f(z) := \sin\left(\frac{1}{z-2}\right)$, $g(z) := \frac{2\sin(z)-3z}{z}$ und $h(z) := \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{(z-2i)(z+2i)}$. Dann sind f holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{2\}$, g holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ und h holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{2i,-2i\}$. Weiter ist $\partial B_{10}(0)$ ein geschlossener stückweise glatter Weg in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}$ ist sternförmig, so dass $\partial B_{10}(0)$ nullhomolog in $\mathbb{C}$ nach Proposition 8.4 ist. Nach Beispiel 4.16 gilt weiter $n(\partial B_{10}(0), z) = 1$ für alle $z \in B_{10}(0)$. Somit gilt nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B_{10}(0)} (f(z)+g(z)+h(z))\,dz \\
&\quad= \int_{\partial B_{10}(0)} f(z)\,dz + \int_{\partial B_{10}(0)} g(z)\,dz + \int_{\partial B_{10}(0)} h(z)\,dz \\
&\quad= 2\pi i\cdot n(\partial B_{10}(0),2)\cdot res(f;2) + 2\pi i\cdot n(\partial B_{10}(0),0)\cdot res(g;0) \\
&\qquad+2\pi i\cdot n(\partial B_{10}(0),2i)\cdot res(h;2i) + 2\pi i\cdot n(\partial B_{10}(0),-2i)\cdot res(h;-2i) \\
&\quad= 2\pi i\left(res(f;2)+res(g;0)+res(h;2i)+res(h;-2i)\right).
\end{aligned}$$

Nun ist die Laurentreihe von f in $A_{0,\infty}(2)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sin\left(\frac{1}{z-2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\left(\frac{1}{z-2}\right)^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot(z-2)^{-2k-1} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{(-1)^{-n}}{(-2n+1)!}\cdot(z-2)^{2n-1}, \qquad z\in A_{0,\infty}(2).
\end{aligned}$$

Somit ist der Koeffizient vor $(z-2)^{-1}$ gleich $\frac{(-1)^0}{1!} = 1$, so das $res(f;2) = 1$ nach der Definition des Residuums gilt.

Weiter gilt $g(z) = 2\frac{\sin(z)}{z} - 3$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Somit hat g in $z = 0$ eine hebbare Singularität. Also ist die Laurentreihe von g in $A_{0,\infty}(0)$ eine Potenzreihe, so dass ihr Hauptteil gleich 0 ist. Somit ist insbesondere der Koeffizient vor z^{-1} gleich 0, so dass $res(g;0) = 0$ nach der Definition des Residuums folgt.

Weiter hat h einen Pol höchstens erster Ordnung in $z = 2i$ und $z = -2i$, so dass nach Proposition 8.7 gilt

$$\begin{aligned} res(h;2i) &= \frac{1}{0!} \cdot \lim_{z\to 2i} \{(z-2i) \cdot h(z)\} = \lim_{z\to 2i} \frac{1}{z+2i} = \frac{1}{4i}, \\ res(h;-2i) &= \frac{1}{0!} \cdot \lim_{z\to -2i} \{(z+2i) \cdot h(z)\} = \lim_{z\to -2i} \frac{1}{z-2i} = -\frac{1}{4i}. \end{aligned}$$

Es folgt insgesamt

$$\int_\gamma (f(z) + g(z) + h(z))\, dz = 2\pi i \left(1 + 0 + \frac{1}{4i} - \frac{1}{4i}\right) = 2\pi i.$$

(b) Es gilt

$$f(z) := \frac{e^z}{z^4 + 2z^3 + 2z^2} = \frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)} = \frac{e^z}{z^2(z-(-1+i))(z-(-1-i))},$$

so dass f holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0, -1+i, -1-i\}$ ist. Da f in $-1+i$ und $-1-i$ jeweils einen Pol höchstens erster Ordnung sowie in 0 einen Pol höchstens zweiter Ordnung hat, gilt mit dem Residuensatz und Proposition 8.7, da $\partial_{B_3(0)}$ nullhomolog in $\mathbb{C}$ nach Proposition 8.4 ist und $n(\partial B_3(0), z) = 1$ für alle $z \in B_3(0)$ nach Beispiel 4.16 gilt,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_3(0)} f(z)\, dz &= 2\pi i\Big(n(\partial B_3(0), 0) \cdot res(f;0) \\ &\quad + n(\partial B_3(0), -1+i) \cdot res(f;-1+i) \\ &\quad + n(\partial B_3(0), -1-i) \cdot res(f;-1-i)\Big) \\ &= 2\pi i\,(res(f;0) + res(f;-1+i) + res(f;-1-i)) \\ &= 2\pi i\left(\frac{1}{1!} \cdot \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left\{z^2 \cdot f(z)\right\} + \frac{1}{0!} \cdot \lim_{z\to -1+i} \left\{(z+1-i)^1 \cdot f(z)\right\}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{0!} \cdot \lim_{z\to -1-i} \left\{(z+1+i)^1 \cdot f(z)\right\}\right) \\ &= 2\pi i\left(\lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{e^z}{z^2+2z+2} + \lim_{z\to -1+i} \frac{e^z}{z^2(z+1+i)}\right. \\ &\quad \left. + \lim_{z\to -1-i} \frac{e^z}{z^2(z+1-i)}\right) \\ &= 2\pi i\left(\lim_{z\to 0} \frac{e^z(z^2+2z+2) - e^z(2z+2)}{(z^2+2z+2)^2}\right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-1+i}}{(-2i)\cdot 2i} + \frac{e^{-1-i}}{2i\cdot(-2i)}\right) \\ &= 2\pi i\left(\frac{2-2}{4} + \frac{e^{-1+i}}{4} + \frac{e^{-1-i}}{4}\right) = \pi i e^{-1} \frac{e^i + e^{-i}}{2} \\ &= \pi i e^{-1} \cdot \cos(1) = i \cdot \frac{\pi \cdot \cos(1)}{e}. \end{aligned}$$

(c) Es seien $f(z) := \frac{z^2}{e^{2z}-1}$ sowie $g(z) := z^2$ und $h(z) := e^{2z} - 1$. Dann sind g und h ganze Funktionen und es gilt

$$h(z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2z = 2k\pi i \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad z = k\pi i \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Somit ist f holomorph in $B_5(0) \setminus \{0, \pi i, -\pi i\}$. Weiter ist $\partial B_4(0)$ ein geschlossener stückweise glatter Weg in $B_5(0)$ und $B_5(0)$ ist sternförmig, so dass $\partial B_4(0)$ nullhomolog in $B_5(0)$ nach Proposition 8.4 ist. Nach Beispiel 4.16 gilt weiter $n(\partial B_4(0), z) = 1$ für alle $z \in B_4(0)$. Somit gilt nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_4(0)} f(z)\, dz &= 2\pi i\Big(n(\partial B_4(0), 0) \cdot res(f;0) \\ &\quad + n(\partial B_4(0), \pi i) \cdot res(f;\pi i) + n(\partial B_4(0), -\pi i) \cdot res(f;-\pi i)\Big) \\ &= 2\pi i\,(res(f;0) + res(f;\pi i) + res(f;-\pi i)). \end{aligned}$$

Nun gilt $h'(z) = 2e^{2z} \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Daher hat h in $z = 0$ eine Nullstelle der Ordnung 1, so dass $\frac{1}{h}$ dort einen Pol der Ordnung 1 nach Aufgabe von Übungsblatt 11 hat. Somit gibt es eine in $B_3(0)$ holomorphe Funktion k mit $k(0) \neq 0$ und $\frac{1}{h(z)} = z^{-1}k(z)$ für $z \in B_3(0) \setminus \{0\}$. Es folgt

$$f(z) = \frac{z^2}{h(z)} = z \cdot k(z), \qquad z \in B_3(0) \setminus \{0\}.$$

Da $z \cdot k(z)$ holomorph in $B_3(0)$ ist, ist somit f holomorph fortsetzbar in $B_3(0)$ und hat eine hebbare Singularität in $z = 0$. Somit ist die Laurentreihe von f in $A_{0,3}(0)$ eine Potenzreihe, so dass $res(f; 0) = 0$ gilt, da der Hauptteil der Laurentreihe gleich 0 ist.

Weiter gilt $g(\pi i) = g(-\pi i) = -\pi^2 \neq 0$ und $h'(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Somit folgt mit Proposition 8.9

$$\begin{aligned} res(f; \pi i) &= \frac{g(\pi i)}{h'(\pi i)} = \frac{-\pi^2}{2e^{2\pi i}} = -\frac{\pi^2}{2}, \\ res(f; -\pi i) &= \frac{g(-\pi i)}{h'(-\pi i)} = \frac{-\pi^2}{2e^{-2\pi i}} = -\frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Somit folgt insgesamt

$$\int_{\partial B_4(0)} f(z)\, dz = 2\pi i \left(0 - \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right) = -2\pi^3 i.$$

Hausaufgabe 6: 4+4 Punkte

Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2x}{x^4+x^2+1}\, dx$,

(b) $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^4}\, dx$.

Lösung:

(a) Es sei $f(z) := \frac{z^2+2z}{z^4+z^2+1}$. Wir berechnen zunächst die Nullstellen des Nenners. Mit $w = z^2$ gilt $w^2 + w + 1 = 0$ für

$$w_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

also

$$w_1 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \qquad w_2 = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Somit sind die Singularitäten von f (mit Definition 3.26) gegeben durch

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{w_1} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad & z_2 &= -z_1 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_3 &= \sqrt{w_2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad & z_4 &= -z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Mit $H := \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > -\frac{1}{2}\}$ ist H konvex und damit sternförmig sowie offen und zusammenhängend, also ein sternförmiges Gebiet. Es sei nun $R > 2$. Dann ist

$$\gamma_R : [-R, R+\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma_R(t) := \begin{cases} t, & \text{falls } t \in [-R, R], \\ R \cdot e^{i(t-R)}, & \text{falls } t \in (R, R+\pi], \end{cases}$$

ein geschlossener stückweise glatter Weg in H, der den durch γ_R berandeten Halbkreis M_R im mathematisch positiven Sinn umläuft. Somit gilt insbesondere $n(\gamma_R, z) = 1$ für alle $z \in M_R$. Außerdem ist γ_R nullhomolog in H nach Proposition 8.4, da H sternförmig ist. Wegen $z_1, z_3 \in M_R$ und $z_2, z_4 \in \mathbb{C} \setminus H$ ist somit f holomorph in $H \setminus \{z_1, z_3\}$. Somit folgt aus dem Residuensatz

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz &= 2\pi i \left(n(\gamma_R, z_1) \cdot res(f; z_1) + n(\gamma_R, z_3) \cdot res(f; z_3) \right) \\ &= 2\pi i \left(res(f; z_1) + res(f; z_3) \right). \end{aligned}$$

Wegen $f(z) = \frac{z^2+2z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$ hat f in z_1 und z_3 jeweils einen Pol höchstens erster Ordnung, so dass mit Proposition 8.7 folgt

$$\begin{aligned}
res(f; z_1) &= \lim_{z\to z_1} \{(z-z_1)f(z)\} = \lim_{z\to z_1} \frac{z^2+2z}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} \\
&= \frac{z_1^2+2z_1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} = \frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1+i\sqrt{3}}{(1+i\sqrt{3})\cdot 1\cdot i\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}}{i\sqrt{3}-3} \\
&= \frac{(1+i3\sqrt{3})(-i\sqrt{3}-3)}{2(i\sqrt{3}-3)(-i\sqrt{3}-3)} = \frac{-i\sqrt{3}-3+9-i9\sqrt{3}}{2(3+9)} = \frac{6-i\cdot 10\sqrt{3}}{24} \\
&= \frac{1}{4} - i\cdot\frac{5\sqrt{3}}{12}, \\
res(f; z_3) &= \lim_{z\to z_3} \{(z-z_3)f(z)\} = \lim_{z\to z_3} \frac{z^2+2z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_4)} \\
&= \frac{z_3^2+2z_3}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)} = \frac{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-1+i\sqrt{3}}{(-1)\cdot i\sqrt{3}\cdot(-1+i\sqrt{3})} = \frac{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\sqrt{3}+3} \\
&= -\frac{(3-i\sqrt{3})^2}{2(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})} = -\frac{9-3-i\cdot 6\sqrt{3}}{2(9+3)} = -\frac{6-i\cdot 6\sqrt{3}}{24} \\
&= -\frac{1}{4}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4}-i\cdot\frac{5\sqrt{3}}{12}+-\frac{1}{4}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 2\pi i\cdot(-i)\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Mit $\alpha_R := \gamma_R|_{[-R,R]}$ und $\beta_R := \gamma|_{[R,R+\pi]}$ folgt dann

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} = \int_{\alpha_R} f(z)\,dz + \int_{\beta_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{t^2+2t}{t^4+t^2+1}\,dt + \int_{\beta_R} f(z)\,dz. \tag{1}$$

Nun gilt mit der Standardabschätzung

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\beta_R} f(z)\,dz\right| &= L(\beta_R)\cdot\max_{z\in\beta_R}\left|\frac{z^2+2z}{z^4+z^2+1}\right| \le \pi R\cdot\max_{z\in\beta_R}\frac{|z|^2+2|z|}{|z|^4-|z|^2-1} \\
&= \pi R\cdot\frac{R^2+2R}{R^4-R^2-1} = \pi\cdot\frac{R^3+2R^2}{R^4-R^2-1}\to 0 \qquad \text{für } R\to\infty.
\end{aligned}$$

Somit folgt aus (1) für $R\to\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2+2t}{t^4+t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

(b) Es sei $f(z) := \frac{1}{(z^2+1)^4} = \frac{1}{(z-i)^4(z+i)^4}$. Somit ist f holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ und hat in i und $-i$ jeweils einen Pol vierter Ordnung. Mit $H := \{z\in\mathbb{C} \mid Im(z) > -\frac{1}{2}\}$ ist H konvex und damit sternförmig sowie offen und zusammenhängend, also ein sternförmiges Gebiet. Es sei nun $R>1$. Dann ist

$$\gamma_R : [-R, R+\pi]\to\mathbb{C},\ \gamma_R(t) := \begin{cases} t, & \text{falls } t\in[-R,R], \\ R\cdot e^{i(t-R)}, & \text{falls } t\in(R,R+\pi], \end{cases}$$

ein geschlossener stückweise glatter Weg in H, der den durch γ_R berandeten Halbkreis M_R im mathematisch positiven Sinn umläuft. Somit gilt insbesondere $n(\gamma_R, z) = 1$ für alle $z\in M_R$. Außerdem ist γ_R nullhomolog in H nach Proposition 8.4, da H sternförmig ist. Wegen $i\in M_R$ und $-i\in\mathbb{C}\setminus H$ ist somit f holomorph in $H\setminus\{i\}$. Somit folgt aus dem Residuensatz und Proposition 8.7 mit $g(z) := \frac{1}{(z+i)^4}$, da f in i einen Pol vierter Ordnung hat,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} f(z)\,dz &= 2\pi i\cdot n(\gamma_R, i)\cdot res(f;i) = 2\pi i\cdot res(f;i) \\
&= 2\pi i\cdot\frac{1}{3!}\lim_{z\to i}\frac{d^3}{dz^3}\left\{(z-i)^4 f(z)\right\} = \frac{2\pi i}{6}\lim_{z\to i} g'''(z) \\
&= \frac{\pi i}{3}\lim_{z\to i}\frac{(-4)\cdot(-5)\cdot(-6)}{(z+i)^7} = -\frac{\pi i}{3}\cdot\frac{120}{(2i)^7} = -\frac{40\pi i}{2^7\cdot i^4\cdot i^3} \\
&= -\frac{5\pi i}{16\cdot 1\cdot(-i)} = \frac{5\pi}{16}.
\end{aligned}$$

Mit $\alpha_R := \gamma_R|_{[-R,R]}$ und $\beta_R := \gamma|_{[R,R+\pi]}$ folgt dann

$$\frac{5\pi}{16} = \int_{\alpha_R} f(z)\,dz + \int_{\beta_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{(t^2+1)^4}\,dt + \int_{\beta_R} f(z)\,dz. \tag{2}$$

Nun gilt mit der Standardabschätzung

$$\begin{aligned}\left|\int_{\beta_R} f(z)\,dz\right| &= L(\beta_R)\cdot \max_{z\in\beta_R}\left|\frac{1}{(z^2+1)^4}\right| \le \pi R \cdot \max_{z\in\beta_R}\frac{1}{(|z|^2-1)^4}\\ &= \pi R\cdot \frac{1}{(R^2-1)^4} = \pi\cdot\frac{R}{(R^2-1)^4} \to 0 \qquad \text{für } R\to\infty.\end{aligned}$$

Somit folgt aus (2) für $R \to \infty$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(t^2+1)^4}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(t^2+1)^4}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\pi}{16} = \frac{5\pi}{32},$$

da $\frac{1}{(t^2+1)^4}$ für $t \in \mathbb{R}$ eine gerade Funktion ist.

Hausaufgabe 7: 5+3+2+5 Punkte

Betrachte die durch $g(z) := \frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}$ definierte Funktion, wobei natürlich $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$.

a) Bestimme ihre Polstellen und Residuen.

b) Berechne $\int_{\gamma_N} g(z)dz$, wobei γ_N den Rechteckweg bezeichne, der die Punkte $(N+\frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ miteinander verbindet.

c) Zeige, dass $\cot \pi z$ auf γ_N^* beschränkt ist (mit von N unabhängiger Schranke).

d) Berechne mittels a)-c) den Wert von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Lösung:

a) Die Funktion hat Polstellen überall dort, wo ihr Nenner null wird, also in jeder ganzen Zahl. In $z_0 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ handelt es sich um einen Pol erster Ordnung, das Residuum lässt sich also nach der vorherigen Aufgabe als

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\pi\cos(\pi z)}{z^2\sin(\pi z)}$$

berechnen, worin für $z_0 = N \in 2\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{\sin \pi z} = \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{\sin(\pi z - \pi z_0)} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{\pi\cos(0)} = \frac{1}{\pi}$$

und für $z_0 = N \in 2\mathbb{Z}+1$ (wegen $\sin(z) = \sin(\pi - z)$)

$$\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{\sin \pi z} = \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{\sin(\pi z_0 - \pi z)} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin(-\pi z)} = \frac{1}{-\pi\cos(0)} = -\frac{1}{\pi}.$$

Damit ist

$$res_n g(z) = \frac{\pi\cos(n\pi)}{n^2\frac{1}{\pm\pi}} = \frac{1}{n^2}$$

für $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. In 0 handelt es sich um einen Pol dritter Ordnung ($z^2\sin z$ hat Nullstelle der Ordnung 3), wir berechnen das Residuum wie in der vorherigen Aufgabe beschrieben als

$$\begin{aligned}
res_0(f) &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3 \frac{\pi\cos(\pi z)}{z^2\sin z}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\pi z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right)\\
&= \frac{\pi^2}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\frac{z\cos z}{\sin z}\\
&= \frac{\pi^2}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{\cos z\sin z - z\sin^2 z - z\cos^2 z}{\sin^2 z}\\
&= \frac{\pi^2}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{\cos z}{\sin z} - \frac{z}{\sin^2 z}\right)\\
&= \frac{\pi^2}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{-\sin^2 z - \cos^2 z}{\sin^2 z} - \frac{\sin^2 z - z2\sin z\cos z}{\sin^4 z}\right)\\
&= \frac{\pi^2}{2}\lim_{z\to 0}\left(-\frac{2}{\sin^2 z} - \frac{-z2\cos z}{\sin^3 z}\right)\\
&= \pi^2\lim_{z\to 0}\left(\frac{-\sin z + z\cos z}{\sin^3 z}\right)\\
&= \pi^2\lim_{z\to 0}\left(\frac{-\cos z + \cos z - z\sin z}{3\sin^2 z\cos z}\right)\\
&= \pi^2\lim_{z\to 0}\left(\frac{-z}{3\sin z\cos z}\right)\\
&= -\frac{\pi^2}{3}\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\lim_{z\to 0}\frac{1}{\cos z}\\
&= -\frac{\pi^2}{3}.
\end{aligned}$$

b) Nach dem Residuensatz ist dieses Integral (bis auf einen Vorfaktor $2\pi i$) gleich der Summe aller vom Weg umschlossenen Residuen, also der Residuen in $-N, -N+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots N-1, N$, d.h.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_N} g(z)dz = \sum_{n=-N}^{-1}\frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n}^2 = -\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n^2}.$$

c) $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i + \frac{2}{e^{2iz}-1}$. Für $z = x+iy$ gilt also im Fall $x = (\pm\frac{2N+1}{2})\pi$, dass

$$|\cot(x+iy)| = |i + \frac{2}{e^{\pm(2N+1)\pi i}e^{-y}-1}| = |i - \frac{2}{1+e^{-y}}| \le \sqrt{5}$$

und für $y = \frac{2N+1}{2}\pi$

$$|\cot(x+iy)| = |i + \frac{2}{e^{2ix}e^{-(2N+1)\pi}-1}| \le 1 + |\frac{2}{e^{2ix}e^{-(2N+1)\pi}-1}|,$$

hier genügt es also, $|e^{2ix}e^{-(2N+1)\pi}-1|$ durch eine positive Zahl nach unten abzuschätzen. Da aber $e^{-(2N+1)\pi} \le e^{-\pi}$ und damit wegen $|e^{2ix}| = 1$ auch

$$|e^{2ix}e^{-(2N+1)\pi} - 1| = |e^{-(2N+1)\pi} - e^{-2ix}| \ge 1 - |e^{-(2N+1)\pi}| \ge 1 - e^{-\pi} =: C > 0.$$

Für $y = -\frac{2N+1}{2}\pi$ ist wiederum

$$|\cot(x+iy)| = |i + \frac{2}{e^{2ix}e^{(2N+1)\pi}-1}|$$

und

$$|e^{2ix}e^{(2N+1)\pi} - 1| \ge e^{(2N+1)\pi}| - 1 \ge e^{\pi} - 1 > 0.$$

Also ist für alle $z \in \gamma_N^*$

$$|\cot(\pi z)| \le \max\{\sqrt{5}, 1 + \frac{2}{C}, 1 + \frac{2}{e^{\pi}-1}\} =: K.$$

d) Da $L(\gamma_N) = 8N+4$ und (wie man aus Teil c schließt) für $z \in \gamma_N^*$ auch

$$|\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}| < \frac{\pi K}{N^2}$$

gilt, folgt

$$0 = \lim_{N\to\infty} \int_{\gamma_N} f(z)dz = \lim_{N\to\infty} (2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3})$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$