Michael Winkler
Johannes Lankeit

15.7.2014

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 14. Übung

Hausaufgabe 1: 0 Punkte

(a) Bestimme die Anzahl der Nullstellen in $B_1(0)$ (mit Vielfachheiten gezählt) der Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^4 - 3z + 1$ für $z \in \mathbb{C}$.

(b) Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := 3z^8 - 5z^5 + 1$ für $z \in \mathbb{C}$, in $B_1(0)$ genau fünf verschiedene Nullstellen hat.

(c) Zeige, dass die Gleichung $e^{-z} + z = 5$ in $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$ genau eine Lösung hat, und untersuche, ob diese Lösung reell ist.

Lösung:

(a) Es sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) := -3z + 1$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann sind f und g ganze Funktionen. Weiter hat g in $\mathbb{C}$ genau eine einfache Nullstelle in $z_0 = \frac{1}{3}$ wegen $g(\frac{1}{3}) = 0$ und $g'(\frac{1}{3}) = -3 \neq 0$. Also hat g in $B_1(0) \subset \mathbb{C}$ genau eine Nullstelle (mit Vielfachheiten gezählt). Weiter gilt für $z \in \partial B_1(0)$

$$|f(z) - g(z)| = |z^4| = |z|^4 = 1 < 3 - 1 = |3z| - 1 \leq |3z - 1| = |-3z + 1| = |g(z)|.$$

Nach dem Satz von Rouché haben somit f und g in $B_1(0)$ gleich viele Nullstellen mit Vielfachheiten gezählt. Daher hat f genau eine Nullstelle in $B_1(0)$ und diese hat die Vielfachheit 1.

(b) Es sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) := -5z^5$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann sind f und g ganze Funktionen. Weiter hat g in $\mathbb{C}$ genau eine Nullstelle in $z_0 = 0$ und diese hat die Ordnung 5. Also hat g in $B_1(0) \subset \mathbb{C}$ genau fünf Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt). Weiter gilt für $z \in \partial B_1(0)$

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &= |3z^8 + 1| \leq |3z^8| + 1 = 3|z|^8 + 1 = 4 \\ &< 5 = 5|z^5| = |-5z^5| = |g(z)|. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rouché haben somit f und g in $B_1(0)$ gleich viele Nullstellen mit Vielfachheiten gezählt. Daher hat f genau fünf Nullstellen in $B_1(0)$ mit Vielfachheiten gezählt. Weiter gilt

$$f'(z) = 24z^7 - 25z^4 = z^4(24z^3 - 25) \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Wegen $24z^3 - 25 \neq 0$ für alle $z \in B_1(0)$ gilt somit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in B_1(0) \setminus \{0\}$. Wegen $f(0) = 1 \neq 0$ ist 0 keine Nullstelle von f. Somit gilt $f'(z) \neq 0$ für alle Nullstellen $z \in B_1(0)$ von f. Daher haben alle Nullstellen von f in $B_1(0)$ die Ordnung 1, so dass f genau fünf verschiedene Nullstellen der Ordnung 1 in $B_1(0)$ hat.

(c) Es seien $f(z) := e^{-z} + z - 5$ und $g(z) := z - 5$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann sind f und g ganze Funktionen. Weiter hat g in $\mathbb{C}$ genau eine Nullstelle in $z_0 = 5$ genau eine Nullstelle und diese hat die Ordnung 1.

Es sei nun $R > 5$ beliebig. Dann gilt $5 \in B_R(R)$ wegen $|5 - R| = R - 5 < R$, so dass g in $B_R(R) \subset \mathbb{C}$ genau eine Nullstelle mit Vielfachheiten gezählt hat. Wegen $B_R(R) \subset H := \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$ gilt $Re(z) \geq 0$ für alle $z \in \partial B_R(R)$. Somit gilt für alle $z \in \partial B_R(R)$

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &= \left|e^{-z}\right| = \left|e^{-Re(z)} \cdot e^{-i \cdot Im(z)}\right| = e^{-Re(z)} \leq e^0 = 1 \\ &< 5 = R - (R - 5) = |z - R| - |R - 5| \leq |z - R + R - 5| \\ &= |z - 5| = |g(z)|. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rouché haben somit f und g in $B_R(R)$ gleich viele Nullstellen mit Vielfachheiten gezählt. Daher hat f genau eine Nullstelle z_R in $B_R(R)$ und diese hat die Vielfachheit 1. Wegen $B_r(r) \subset B_R(R)$ für alle

$0 < r < R$ gibt es daher $z_0 \in B_6(6)$ mit $z_R = z_0$ für alle $R \geq 6$. Daher hat f in $B_R(R)$ genau eine Nullstelle und diese Nullstelle ist z_0 für alle $R \geq 6$. Da weiter $H = \bigcup_{R\geq 6} B_R(R)$ gilt, hat somit f genau eine Nullstelle in H und diese ist z_0.

Weiter gilt für $x \in [0,\infty) \subset \mathbb{R}$, dass $f(0) = -4 < 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ erfüllt ist. Somit hat f nach dem Zwischenwertsatz für reelle stetige Funktionen mindestens eine Nullstelle $x_0 \in (0,\infty)$. Wegen $(0,\infty) \subset H$ gilt somit $x_0 = z_0$, so dass f in H genau eine Nullstelle hat und diese ist reell. Also hat die Gleichung $e^{-z} + z = 5$ genau eine Lösung in H und diese ist reell.

Hausaufgabe 2: 0 Punkte

Wir sagen von einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, es habe die Quadratwurzeleigenschaft (QWE), wenn zu jeder nullstellenfreien holomorphen Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion $g\colon G \to \mathbb{C}$ existiert, sodass $(g(z))^2 = f(z)$ für alle $z \in G$.
Der Kürze halber bezeichnen wir außerdem die Einheitskreisscheibe mit $\mathbb{E} := B_1(0)$.

a) Zeige (durch Verweis auf die richtigen Übungsaufgaben), dass jedes sternförmige Gebiet die QWE hat.
Genauer gilt das sogar für jedes „(homologisch) einfach zusammenhängende“ Gebiet, also für jedes Gebiet mit der Eigenschaft, dass jeder geschlossene SGW darin nullhomolog ist.

b) Zeige: Ist $\widehat{f}\colon G \to \widehat{G}$ biholomorph und hat G die QWE, so hat auch $\widehat{G}$ die QWE.

c) Es sei G ein Gebiet mit $0 \in G$ und $\mathbb{C} \setminus G$ enthalte $B_r(z_0)$ für ein $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeige: Es gibt eine injektive holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbb{E}$ mit $f(0) = 0$.

d) Es sei $G \neq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit QWE und $0 \in G$. Zeige: Es gibt eine holomorphe, injektive Funktion $f\colon G \to \mathbb{E}$ mit $f(0) = 0$.
Tipp: Zeige dazu: Die Wurzel v von $z - a$ (wie sollte man a wählen?) ist injektiv und erfüllt $v(G) \cap -v(G) = \emptyset$.

e) Für $c \in \mathbb{E}$ definieren wir $g_c\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ durch $g_c(z) = \frac{z-c}{\bar{c}z-1}$. Zeige: g_c ist wohldefiniert und erfüllt $g_c \circ g_c = id_{\mathbb{E}}$.

f) Für $c \in \mathbb{E}$ definieren wir $\Psi_c\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ durch $\Psi_c(z) = g_{c^2}((g_c(z))^2)$.
Zeige: Ψ_c ist wohldefiniert, holomorph und erfüllt $\Psi_c(0) = 0$. Außerdem ist für alle $z \in \mathbb{E}\setminus\{0\}$ auch $|\Psi_c(z)| < |z|$.
(Tipp: Zeige „$\leq$“ und argumentiere, um Gleichheit auszuschließen, mit der Nicht-Biholomorphie von $z \mapsto z^2$.)

g) Es sei $G \subset \mathbb{E}$ ein Gebiet mit QWE und $c \in \mathbb{E}$ mit $c^2 \notin G$. v sei die Quadratwurzel aus g_{c^2} auf G mit $v(0) = c$. Definiere $\kappa\colon G \to \mathbb{E}, z \mapsto g_c(v(z))$. Zeige: κ ist wohldefiniert, $\kappa(0) = 0$, $\kappa(G) \subset \mathbb{E}$, $\Psi_c \circ \kappa = id_G$ und folgere Injektivität von κ und mit f), dass $|z| < |\kappa(z)|$ für alle $z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ erfüllt ist.

h) Es sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Injektion. Zeige: Dann ist f biholomorph.
Zeige dazu mit dem Offenheitssatz (Übung 11, HA 4), dass zu f eine stetige Umkehrabbildung existiert. Folgere aus Satz 2.8, dass f^{-1} holomorph auf $f(D) \setminus f(N(f'))$ ist, wobei $N(f') = \{z \in G; f'(z) = 0\}$. Zeige (Identitätssatz): $N(f')$ ist diskret und abgeschlossen, also auch $f(N(f'))$. Folgere Holomorphie von f^{-1}.

i) Für ein Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ mit $0 \in G$ und QWE setze

$$\mathcal{F}_G = \{f\colon G \to \mathbb{E} \text{ holomorph und injektiv, } f(0) = 0\}.$$

Zeige: $\mathcal{F}_G \neq \emptyset$ und jedes $f \in \mathcal{F}_G$ ist biholomorph

j) Es sei $G \neq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit QWE und $0 \neq p \in G$. Zeige: Erfüllt $h \in \mathcal{F}_G$

$$|h(p)| = \sup\{|f(p)|; f \in \mathcal{F}_G\},$$

so ist $h(G) = \mathbb{E}$. (Betrachte dazu in einem Widerspruchsbeweis $\kappa \circ h$ für ein geeignetes κ wie in g).)

k) Die Funktionen f_n seien holomorph auf dem Gebiet G und kompakt konvergent gegen eine nichtkonstante Funktion f. Folgere aus dem Satz von Rouché, dass zu jedem $c \in G$ ein $n_c \in \mathbb{N}$ und eine Folge $c_n \to c$ existieren mit $f_n(c_n) = f(c)$ für alle $n > n_c$.

l) Die Funktionen f_n seien holomorph auf dem Gebiet G und konvergieren kompakt gegen die nichtkonstante Funktion f. Zeige: Sind alle f_n nullstellenfrei, so hat auch f keine Nullstelle.
Zeige weiter: Gilt für eine Menge $A \subset \mathbb{C}$, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $f_n(G) \subset A$, so ist auch $f(G) \subset A$. Und sind alle f_n injektiv, so ist auch f injektiv.

m) Zeige den folgenden Satz: Jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $G \neq \mathbb{C}$ und QWE lässt sich biholomorph auf $\mathbb{E}$ abbilden. Anleitung: (OBdA $0 \in G$) Wähle $p \in G \setminus \{0\}$. Zeige: $\mu := \sup\{|f(p)|; f \in \mathcal{F}_G\} > 0$. Wähle eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_G$ mit $f_n(p) \to \mu$ und weise die Existenz eines Grenzelements h in $\mathcal{F}_G$ nach. Schließe, dass $h(G) = \mathbb{E}$ und dass h biholomorph ist.

Lösung:

a) Blatt 10, HA 4 iVm Blatt 6 HA 6.

b) Klar: $g\colon \widehat{G} \to \mathbb{C}$ nullstellenfrei $\rightsquigarrow$ $g \circ f^{-1}$ auf G nullstellenfrei $\rightsquigarrow$ Existenz von $\sqrt{g \circ f^{-1}}$. Definiere $\sqrt{g}(z) := \sqrt{g \circ f^{-1}}(f(z))$, also $\sqrt{g} = \sqrt{g \circ f^{-1}} \circ f$.

c) $f(z) = \frac{1}{|\frac{1}{z_0}| + \frac{1}{r}}(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z - z_0})$

d) Sei $a \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann ist $z - a$ nullstellenfrei in G und hat also eine Quadratwurzel v. Ist nun $v(z_1) = v(z_2)$, so muss auch $v(z_1)^2 = v(z_2)^2$, also $z_1 - a = z_2 - a$ und damit $z_1 = z_2$ sein, d.h. v ist injektiv.
Sei $w \in v(G) \cap -v(G)$. Das heißt, es gibt $z_1 \in G$ mit $v(z_1) = w$ und $z_2 \in G$ mit $-v(z_2) = w$. Demnach ist $z_1 - a = (v(z_1))^2 = w^2 = (-v(z_2))^2 = (v(z_2))^2 = z_2 - a$, also $z_1 = z_2$ und daher $w = v(z_1) = -v(z_1) = 0$. Aber $0 \notin v(G)$, denn $z \mapsto z - a$ (und damit auch v) ist nullstellenfrei in G.
Die Hintereinanderausführung von v und der Funktion aus c) liefert damit das Gewünschte. – Denn das Bild von v enthält eine Kugel um einen Punkt, dasselbe gilt daher für $-v(G)$ und demzufolge auch für $\mathbb{C} \setminus v(G)$.

e) Nachrechnen. Für Wohldefiniertheit ist zu zeigen, dass der Funktionswert tatsächlich in $\mathbb{E}$ liegt.

f) Wohldefiniertheit und Holomorphie sind klar (Komposition), Wert bei 0 ergibt sich durch Einsetzen. $\leq$ ergibt sich aus dem Schwarzschen Lemma (U11 PA2); gölte Gleichheit, wäre $\Psi_c(z) = \lambda z$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$, insbesondere wäre Ψ_c biholomorph. Dann müsste aber auch $g_{c^2} \circ \Psi_c \circ g_c$ biholomorph sein, d.h. $z \mapsto g_{c^2} \circ \Psi_c \circ g_c(z) = g_{c^2}(g_{c^2}((g_c(g_c(z)))^2) = z^2$.

g) Die Definition zeigt, dass $\Psi_c(\kappa(z)) = z$, damit ist auch Injektivität klar. Mit f) erhalten wir für $z \neq 0$

$$|z| = |\Psi_c(\kappa(z))| \leq |\kappa(z)|.$$

h) f ist injektiv, also $f\colon G \to f(G)$ bijektiv und hat daher eine Umkehrabbildung. Diese ist genau dann stetig, wenn Urbilder offener Mengen (unter f^{-1}) offen sind, das bedeutet aber, dass Bilder offener Mengen (unter f) offen sind, also gerade die Offenheit von f, die aus dem Satz von der Gebietstreue bzw. dem Offenheitssatz folgt. (Dass f nichtkonstant ist, ist wegen der Injektivität klar.)
Da f' holomorph ist (und nicht null), ist die Nullstellenmenge diskret (siehe Identitätssatz), abgeschlossen ist sie wegen der Stetigkeit und der Abgeschlossenheit von $\{0\}$. Bildet man diese Menge unter einer offenen Abbildung ab, bleibt sie diskret und abgeschlossen.

Mit dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (Satz 7.5) folgt, dass f^{-1} sich holomorph in diese fehlenden Stellen fortsetzen lässt. (Stetig ist die Funktion ja bereits.)

i) Nichtleere folgt aus d), Biholomorphie aus h.

j) Wäre $h(G) \subsetneq \mathbb{E}$, könnten wir wie in g (da wegen b auch $h(G)$ die QWE hätte) ein derartiges κ konstruieren – und $\kappa \circ h \in \mathcal{F}_G$ mit (nach g) $|\kappa(h(p))| > |h(p)|$, im Widerspruch zur Supremumseigenschaft.

k) Betrachten wir die Funktionen $g = f - f(c)$ und $g_n = f_n - f(c)$, so wissen wir, dass g eine Nullstelle hat (in c) und wollen zeigen, dass auch g_n eine Nullstelle haben muss. Dazu sei $B_r(c) \subset G$ so, dass g in $B_r(c)$ nur die Nullstelle c und auf dem Rand von $B_r(c)$ keine Nullstelle hat und wir wählen n_c so groß, dass für alle $n > n_c$ dann $|g_n - g|$ überall auf $\partial B_r(c)$ kleiner ist als das Infimum von $|g|$ auf $\partial B_r(c)$. (Möglich wegen der kompakten Konvergenz.)
Der Satz von Rouché besagt dann, dass g_n und g gleich viele Nullstellen in $B_r(c)$ haben, insbesondere hat also g_n eine Nullstelle. Wir nennen sie c_n. Sei nun c_{n_k} irgendeine Teilfolge der Folge der c_n. Sie enthält eine konvergente Teilfolge $(c_{n_{k_l}})_l$, deren Grenzwert $g(\lim_l c_{n_{k_l}}) = 0$ erfüllt, also gleich c ist. (c war die einzige Nullstelle von g in $\overline{B}_r(c)$.) Damit muss die gesamte Folge der c_n gegen c konvergieren.

l) Der erste Teil ist genau k). Für Injektivität betrachte für $z \in G$ die Funktionen $f_n - f(z)$ in $G \setminus \{z\}$. Die f_n sind dort nullstellenfrei (Injektivität), also auch $f - f(z)$, d.h. letztlich: Für alle $z \in G$ ist $f(z) \neq f(w)$ für jedes $w \neq z$.

m) $\mathcal{F}_G$ ist nichtleer nach i). Sei $f \in \mathcal{F}$. Da $p \neq 0$, $f(0) = 0$ und f injektiv, ist $f(p) \neq 0$ und insbesondere $\mu > 0$.
Nach Definition des Supremums lässt sich eine Folge wählen, sodass $f_n(p) \to \mu$.
Wichtig ist, dass es eine Teilfolge gibt, die gegen eine Funktion konvergiert, die selbst wieder Element von $\mathcal{F}_G$ ist.
Da die Funktionen f_n nach $\mathbb{E}$ abbilden, ist diese Funktionenfamilie lokal beschränkt. Der Satz von Montel (Blatt 11, HA 2) sichert die Existenz einer konvergenten Teilfolge. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß (Blatt 11, HA 3) ist diese wieder holomorph. Ihr Bild ist in $\overline{E}$ enthalten und selbst offen (Blatt 11, HA4), ein Gebiet $D \subset \mathbb{E}$. Injektivität der Grenzfunktion erhalten wir aus Teil l). (Dass die Grenzfunktion h nicht konstant ist, ergibt sich daraus, dass $h(p) = \mu$ und $h(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.)
Teil j) besagt, dass $h(G) = \mathbb{E}$. Biholomorphie steht in i).

Hausaufgabe 3: 0 Punkte

Was besagen die folgenden Sätze/Lemmata und wo (welche Nr. in der Vorlesung, welche Aufgabe auf welchem Übungsblatt) haben wir sie jeweils eingeführt?
Riemannscher Abbildungssatz, Satz von Hurwitz, Satz von Montel, Schwarzsches Lemma, Satz von Morera, Integralsatz von Cauchy, Satz von Liouville, Maximumprinzip, Satz von Weierstraß-Casorati, Weierstraßscher Konvergenzsatz, Weierstraßsches Majorantenkriterium, Riemannscher Hebbarkeitssatz, Identitätssatz, Offenheitssatz, Satz von der Gebietstreue, Cauchysche Integralform**el**, Residuensatz, Satz von Rouché?

Lösung:
Natürlich ist damit noch nicht alles beschrieben, was wir dieses Semester behandelt haben.
Den Satz von Hurwitz haben wir als einzigen der genannten nicht betrachtet, nur direkte Folgerungen erscheinen in Hausaufgabe 2, Teil l).
Riemannscher Abbildungssatz: Hausaufgabe 2, Teil m)
Satz von Montel: Blatt 11, HA 2
Schwarzsches Lemma: Blatt 11, PA 2
Satz von Morera: Blatt 11, PA 3
Integralsatz von Cauchy: 5.7
Satz von Liouville: 5.17
Maximumprinzip: Blatt 10, HA 6
Satz von Weierstraß-Casorati: 7.9
Weierstraßscher Konvergenzsatz: Blatt 11, PA 3
Weierstraßsches Majorantenkriterium: 3.4
Riemannscher Hebbarkeitssatz:7.5
Identitätssatz: 6.5
Offenheitssatz/Satz von der Gebietstreue: Blatt 11, HA 4
Cauchysche Integralform**el**: 5.11 bzw. 5.13
Residuensatz: 8.6
Satz von Rouché: 8.15