Michael Winkler
Johannes Lankeit

15.4.2014

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 2. Übung

Hausaufgabe 1: 15 Punkte

Gegeben seien $a_0, \dots a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Wo sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar?

$$i) f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad ii) f(z) = |z|^2 \qquad iii) f(z) = \mathrm{Re}(z) \qquad iv) f(z) = |z| \qquad v) f(z) = \frac{1}{z^n} \text{ für } z \neq 0$$

Bestimme, wo sie komplex differenzierbar sind, auch ihre Ableitung.

Lösung:

i) Die Polynome sind überall komplex differenzierbar mit Ableitung $\sum_{k=0}^{n} k a_k z^{k-1}$. Zum Nachweis untersuchen wir z^n für $n \in \mathbb{N}$ und verlassen uns auf die Ableitungsregeln für Summen und skalare Vielfache.

$$\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (z+h)^k z^{n-k-1} = n z^{n-1}.$$

Statt der (allgemeinen) "dritten" binomischen Formel kann man natürlich auch die andere nutzen:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k h^{n-k} - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z^k h^{n-k-1} = \binom{n}{n-1} z^{n-1} = n z^{n-1}.$$

ii) $|z|^2 = z\overline{z}$, siehe also Präsenzaufgabe 1, Teil iv): Komplex differenzierbar genau in 0.

iii)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z+h) - \mathrm{Re}(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Re}(h)}{h}.$$

Für Nullfolgen $h = \frac{1}{n}$ erhalten wir den Grenzwert 1, für $h = \frac{1}{n} i$ jedoch 0; der Grenzwert existiert also nicht und Re ist nirgends komplex differenzierbar.

iv) Wäre $z \mapsto |z|$ differenzierbar, dann auch (wegen der Differenzierbarkeit von $z \mapsto z^2$ und der Kettenregel) $z \mapsto |z|^2$, was wir aber außerhalb von $z = 0$ ausgeschlossen haben. Untersuchen wir noch die Stelle 0:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h};$$

dieser Grenzwert existiert nicht. (Betrachte z.B. $h = \frac{1}{n}$ und $h = -\frac{1}{n}$.)

v) f ist in ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex differenzierbar als Verknüpfung von $z \mapsto \frac{1}{z}$ und $z \mapsto z^n$. Die Ableitung ist (Kettenregel)

$$f'(z) = -\frac{1}{z^{2n}} \cdot n z^{n-1} = -\frac{n}{z^{n+1}}.$$

Auch direkt mit der Definition lässt sich das erkennen:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(z+h)^n} - \frac{1}{z^n}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{z^n - (z+h)^n}{z^n (z+h)^n} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{z^n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k h^{n-k}}{h z^n (z+h)^n} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z^k h^{n-k-1}}{z^n (z+h)^n} \\
&= \frac{-\binom{n}{n-1} z^{n-1}}{z^n z^n} \\
&= -\frac{n}{z^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 2: 6 Punkte

Finde alle Lösungen der Gleichung $z^2(1-z^2)=1$ sowie von $z^2=(a+ib)^2$ bei vorgegebenen $a,b\in\mathbb{R}$.

Lösung:

Wir beginnen mit der zweiten Gleichung und stellen wieder $z=x+iy$ dar, wobei $x,y\in\mathbb{R}$.
Dann ist also $x^2-y^2=a^2-b^2$ und $xy=ab$.
Sollte $a=0$ sein, so ist $xy=0$ und damit $x=0$ oder $y=0$, also wegen $x^2-y^2=-b^2<0$ dann $x=0$ und es folgt $y^2=b^2$, also $y=\pm b$.
Ist $a\neq 0$, können wir $b=\frac{xy}{a}$ identifizieren und erhalten aus Einsetzen

$$x^2-y^2=a^2-\frac{x^2y^2}{a^2} \qquad \text{also} \qquad a^4+(y^2-x^2)a^2-x^2y^2.$$

Diese (in a^2 quadratische) Gleichung hat die Lösungen $a^2=\frac{x^2-y^2\pm\sqrt{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}{2}=\frac{x^2-y^2\pm(x^2+y^2)}{2}$, also $a^2=-y^2$ oder $a^2=x^2$.
Der Fall $a^2=-y^2$ wäre wegen $a\in\mathbb{R}$ allenfalls für $a=0$ möglich; das ist der schon betrachtete Fall.
Es ist also $a^2=x^2$ und damit $a=x$ oder $a=-x$. Falls $a=x$ folgt aus $xy=ab$, dass $y=b$; falls $a=-x$, ist $y=-b$.
Wir stellen fest, dass als Lösungen der Gleichung genau

$$x+iy=a+ib \qquad \text{und} \qquad x+iy=-(a+ib)$$

in Frage kommen.

Hier löst z^2 offenbar die Gleichung $(z^2)^2+z^2-1=0$. Nach der Präsenzaufgabe (die die soeben behandelte Aussage bereits benutzt) ist daher $z^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ oder $z^2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
Aus

$$(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

erhalten wir $x^2-y^2=\frac{1}{2}$ und $xy=-\frac{\sqrt{3}}{4}$. Insbesondere sind x und y von null verschieden, wir können also die zweite Gleichung zu $x=-\frac{\sqrt{3}}{4y}$ auflösen. Damit ergibt sich $\frac{3}{16y^2}-y^2=\frac{1}{2}$ und die Lösung dieser Gleichung ist $y^2=\frac{1}{4}$ (wegen $y^2>0$) und damit $y=\pm\frac{1}{2}$, also lösen (wegen $x=-\frac{\sqrt{3}}{4y}$

$$z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i \qquad \text{und} \qquad z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

die Gleichung.
Die anderen beiden Lösungen erhält man analog, falls $(x+iy)^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, als

$$z_3=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i \qquad \text{bzw.} \qquad z_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

Die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung ist damit $\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$.

Hausaufgabe 3: 3 Punkte

Eine Funktion $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ erfülle für $z\in\mathbb{C}$ und alle $h\in\mathbb{C}$

$$f(z+h)=f(z)+T(z)h+R(h)$$

mit einer Funktion R mit $\lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{|h|}=0$ und (in dem Argument h stetiger und $\mathbb{R}$-)linearer Funktion $T(z)$.
Beweise: f ist genau dann komplex differenzierbar in z, wenn $T(z)$ auch $\mathbb{C}$-linear bezüglich h ist.

Lösung:

Wenn die Funktion die hier angegebene Eigenschaft mit einem $\mathbb{C}$-linearen $T(z)$ erfüllt, ist offenbar die Charakterisierung aus Präsenzaufgabe 3 gegeben und die Funktion komplex differenzierbar.
Wenn die Funktion komplex differenzierbar ist, wissen wir, dass es ein $\mathbb{C}$-lineares $\widetilde{T}(z)$ gibt, sodass

$$f(z+h) = f(z) + \widetilde{T}(z)h + \widetilde{R}(h)$$

und $\lim_{h\to 0} \frac{\widetilde{R}(h)}{h} = 0$, aber wir müssen noch zeigen, dass $\widetilde{T}$ und T übereinstimmen. (Das ist noch nicht klar!)
Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$0 = (T(z) - \widetilde{T}(z))h + R(h) - \widetilde{R}(h).$$

Dann multiplizieren wir die Gleichung mit $\frac{1}{|h|} \in \mathbb{R}$ und erhalten

$$0 = (T(z) - \widetilde{T}(z))\frac{h}{|h|} + \frac{R(h)}{|h|} - \frac{\widetilde{R}(h)}{|h|}.$$

Betrachten wir nun zu jedem $\lambda \in \mathbb{C}$ die Folge $h_n = \frac{1}{n}\lambda$, so erhalten wir wegen der Forderungen an R bzw. $\widetilde{R}$ für $n \to \infty$, dass

$$0 = (T(z) - \widetilde{T}(z))\lambda + 0,$$

also für alle $\lambda \in \mathbb{C}$

$$T(z)\lambda = \widetilde{T}(z)\lambda$$

gilt. Da demnach $T(z) = \widetilde{T}(z)$ und $\widetilde{T}$ $\mathbb{C}$-linear ist, wissen wir damit auch, dass T $\mathbb{C}$-linear sein muss.

Hausaufgabe 4: 4+2+1+2+1 Punkte

Es sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}^{\pm} = \mathbb{H} \cup (-\mathbb{H})$. Zu jeder invertierbaren reellen 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (also zu jedem $A \in GL_2(\mathbb{R})$) betrachten wir

$$f_A \colon \mathbb{H}^{\pm} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

a) Zeige: f_A ist wohldefiniert und an jeder Stelle komplex differenzierbar. Bestimme die Ableitung.

b) Zeige: Für $A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ gilt $f_A \circ f_B = f_{AB}$.

c) Zeige: $f_A(\mathbb{H}^{\pm}) = \mathbb{H}^{\pm}$. Außerdem ist f_A bijektiv und die Umkehrabbildung ist überall komplex differenzierbar.

d) Zeige: $f_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ genau dann, wenn $\det A > 0$.

e) Warum haben wir hier die Abbildung für $A \in GL_2(\mathbb{R})$ und nicht für $A \in GL_2(\mathbb{C})$ definiert?

Lösung:

a) Für Wohldefiniertheit müssen wir feststellen, dass $cz + d \neq 0$. Das ist aber sichergestellt, da $cz + d = 0$ gleichbedeutend mit $z = -\frac{d}{c}$ ist (oder $c = d = 0$, was aber wegen $ad - bc \neq 0$ ausgeschlossen ist) und $-\frac{d}{c} \in \mathbb{R}$ nicht im Definitionsbereich von f_A liegt. Die Differenzierbarkeit lässt sich beispielsweise aus den Ableitungsregeln gewinnen. Die Ableitung ist dementsprechend

$$f'_A(z) = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{\det A}{(cz+d)^2}.$$

b) Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$ und damit

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au+bw & av+bx \\ cu+dw & cv+dx \end{pmatrix}.$$

Einsetzen:

$$f_A(f_B(z)) = \frac{a\frac{uz+v}{wz+x} + b}{c\frac{uz+v}{wz+x} + d} = \frac{auz + av + bwz + bx}{cuz + cv + dwz + dx} = \frac{(au+bw)z + (av+bx)}{(cu+dw)z + (cv+dx)} = f_{AB}(z).$$

c) Wegen $f_{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}} = id$ ist offenbar nach b) $f_{A^{-1}}$ eine auf $\mathbb{H}^{\pm}$ definierte Inverse zu f_A, die überdies nach a) holomorph ist.

d) Für gegebenes Argument $z = x + iy$ betrachten wir den Imaginärteil von $f(z)$:

$$\begin{aligned}
f_A(z) &= \frac{(ax + b + aiy)}{(cx + d + ciy)} \frac{cx + d - ciy}{cx + d - ciy} \\
&= \frac{(ax + b)(cx + d) + acy^2 - axciy - bciy + aiycx + aiyd}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \\
&= \frac{(ax + b)(cx + d) + acy^2 + i(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + (cy)^2},
\end{aligned}$$

also

$$\operatorname{Im}(f_A(z)) = \det A \frac{y}{(cx + d)^2 + (cy)^2}.$$

Dies ist genau dann für $y > 0$ (also $z \in \mathbb{H}$) positiv, wenn $\det A > 0$. (Dass die Abbildung tatsächlich surjektiv auf $\mathbb{H}$ ist, lässt sich an der Existenz der Umkehrabbildung $f_{A^{-1}}$ auf $\mathbb{H}$ ablesen. Beachte: $\det A > 0 \iff \det A^{-1} > 0$.)

e) Für $z = -\frac{d}{c}$ hätte der Nenner eine Nullstelle, der Definitionsbereich müsste also anders (und für jedes f_A auf eine andere Menge) eingeschränkt werden. Wenn man aber davon absieht, funktioniert alles weitere genauso wie hier.

Bemerkung: Wenn man $\mathbb{C}$ noch um einen weiteren Punkt "vergrößert", den wir "∞" nennen wollen, "den unendlich fernen Punkt", so erhält man zum einen die sogenannte Riemannsche Zahlenkugel und zum anderen durch die Definition[1] $f_A(-\frac{d}{c}) = \infty$, $f_A(\infty) = \frac{a}{c}$ mit den in dieser Aufgabe betrachteten **Möbiustransformationen**, die dann auf ganz $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiert sind, die "konformen" Abbildungen dieser Zahlenkugel.

Hausaufgabe 5: 2+4+2 Punkte

a) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Zeige: f ist genau dann reell differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn es $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gibt, sodass für $h \in \mathbb{C}$

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \lambda h + \mu \overline{h} + R(h),$$

wobei $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0$. Wir schreiben auch $\lambda = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f_z(z_0)$ und $\mu = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = f_{\overline{z}}(z_0)$.
Diese Werte heißen **Wirtinger-Ableitungen** von f in z_0.

b) Bestimme die Wirtinger-Ableitungen von $f = \operatorname{Im}$ und von $f(z) = z\overline{z}$.

c) Zeige: $f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y)$, $f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$, wobei f_x und f_y die Ableitungen von f nach dem Real- bzw. Imaginärteil des Arguments bezeichnen (in der Notation aus Präsenzaufgabe 3a: $f_x(z) = T_z\, 1$, $f_y(z) = T_z\, i$).

Lösung:

a) Wir wissen bereits, dass eine sehr ähnliche Darstellung gilt (vgl. auch Präsenzaufgabe 3):

$$f(x + h) = f(x) + Th + R(h).$$

Wir müssen nun noch die reelle 2×2-Matrix $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ als Multiplikation des Arguments $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$, bzw. des komplex Konjugierten davon $\begin{pmatrix} h_1 \\ -h_2 \end{pmatrix}$, mit einer komplexen Zahl beschreiben. Wie die zugehörigen Matrizen

[1] Zumindest im Fall $c \neq 0$. Was man für $c = 0$ macht, sollte klar sein.

aussehen, haben wir in Präsenzaufgabe 2 gesehen: $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ -h_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

also

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+x & y-v \\ v+y & u-x \end{pmatrix}.$$

Auflösen dieser Gleichungen zeigt damit: $f_z(z_0) = \lambda = u + iv = \frac{1}{2}(a+d) + \frac{1}{2}(c-b)i$ und $f_{\overline{z}}(z_0) = \mu = x + iy = \frac{1}{2}(a-d) + \frac{1}{2}(b+c)i$ erfüllen die geforderten Eigenschaften. (Wenn $a = \frac{\partial \mathrm{Re}(f)}{\partial x}$ usw.)
Umgekehrt ist klar, dass sich $\lambda h + \mu \overline{h}$ als Matrix schreiben und passend zu einem T zusammenfassen lässt.

b)
$$\mathrm{Im}(z+h) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(z) + \frac{1}{2i}(h - \overline{h}) = \mathrm{Im}(z) + \frac{1}{2i}h - \frac{1}{2i}\overline{h},$$

für $f = \mathrm{Im}$ ist also an allen Stellen $z \in \mathbb{C}$ jeweils $f_z(z) = \frac{1}{2i}$ und $f_{\overline{z}}(z) = -\frac{1}{2i}$. Dass $R(h) = 0$ auch $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0$ erfüllt, ist klar.
Für $f(z) = z\overline{z}$ ist

$$f(z+h) = (z+h)(\overline{z} + \overline{h}) = z\overline{z} + \overline{z}h + z\overline{h} + h\overline{h}.$$

Wegen

$$\lim_{h\to 0} \frac{h\overline{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \overline{h} = 0$$

lesen wir daran

$$f_z(z) = \overline{z} \qquad \text{und} \qquad f_{\overline{z}}(z) = z$$

ab.

c) Mit Notation wie in a (also insbesondere $T_x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$) ist $f_x = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ und $f_y = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. Daher ist (beachte die Identifikation von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$):

$$\frac{1}{2}(f_x - if_y) = \frac{1}{2}(a+ic) - \frac{1}{2}i(b+id) = \frac{1}{2}(a+d) + \frac{1}{2}i(c-b) = f_z,$$

wie wir an der Rechnung aus a) ablesen.
Genauso:

$$\frac{1}{2}(f_x + if_y) = \frac{1}{2}(a+ic) + \frac{1}{2}i(b+id) = \frac{1}{2}(a-d) + \frac{1}{2}(c+b) = f_{\overline{z}}.$$