Michael Winkler
Johannes Lankeit

22.4.2014

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 3. Übung

Hausaufgabe 1: 12 Punkte

Bei welchen der folgenden Funktionen $u\colon \widetilde{G} \to \mathbb{R}$ kann es sich um den Realteil einer in G holomorphen Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ mit $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ für $x+iy \in G$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ handeln?
Bestimme dann außerdem f.

a) $u(x,y) = e^x(x\cos(y) - y\sin(y))$, $G = \mathbb{C}$, $\widetilde{G} = \mathbb{R}^2$,

b) $u(x,y) = \sin(x)\cos(y)$, $G = \mathbb{C}$, $\widetilde{G} = \mathbb{R}^2$,

c) $u(x,y) = \frac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^3}$, $G = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\widetilde{G} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Lösung:

(a) Damit u Realteil einer holomorphen Funktion f sein kann, muss u nach Folgerung 2.7 harmonisch in $\mathbb{R}^2$ sein. Es gilt:

$$\begin{aligned}
u_x &= e^x(x\cos(y) - y\sin(y) + \cos(y)),\\
u_y &= e^x(-x\sin(y) - \sin(y) - y\cos(y)),\\
u_{xx} &= e^x(x\cos(y) - y\sin(y) + \cos(y) + \cos(y))\\
&= e^x(x\cos(y) - y\sin(y) + 2\cos(y)),\\
u_{yy} &= e^x(-x\cos(y) - \cos(y) - \cos(y) + y\sin(y))\\
&= -e^x(x\cos(y) - y\sin(y) + 2\cos(y)).
\end{aligned}$$

Somit gilt $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in $\mathbb{R}^2$, so dass u der Realteil einer holomorphen Funktion f sein kann. Dazu muss nun nach den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen gelten

$$v_x = -u_y \qquad \text{und} \qquad v_y = u_x.$$

Also muss gelten

$$v_x = -u_y = xe^x\sin(y) + e^x(\sin(y) + y\cos(y)).$$

Mit partieller Integration gilt

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Somit folgt

$$\begin{aligned}
v &= \int v_x\,dx = e^x(x-1)\sin(y) + e^x(\sin(y) + y\cos(y)) + c(y)\\
&= e^x(x\sin(y) + y\cos(y)) + c(y)
\end{aligned}$$

für eine Funktion $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Damit auch $v_y = u_x$ erfüllt ist, muss also gelten

$$u_x = v_y = e^x(x\cos(y) + \cos(y) - y\sin(y)) + c'(y),$$

also $c' \equiv 0$. Somit sind für

$$v(x,y) := e^x(x\sin(y) + y\cos(y)) + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ beide Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt, so dass u also Realteil der holomorphen Funktion $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(x+iy) := u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ ist.

(b) Damit u Realteil einer holomorphen Funktion f sein kann, muss u nach Folgerung 2.7 harmonisch in $\mathbb{R}^2$ sein. Es gilt:

$$\begin{aligned} u_x &= \cos(x)\cos(y), & u_y &= -\sin(x)\sin(y), \\ u_{xx} &= -\sin(x)\cos(y), & u_{yy} &= -\sin(x)\cos(y). \end{aligned}$$

Somit folgt $u_{xx} + u_{yy} = -2\sin(x)\cos(y)$. Also ist z.B. $(u_{xx} + u_{yy})(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \neq 0$, so dass u nicht harmonisch in $\mathbb{R}^2$ ist. Nach Folgerung 2.7 kann daher u kein Realteil einer in $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion sein.

(c) Damit u Realteil einer holomorphen Funktion f sein kann, muss u nach Folgerung 2.7 harmonisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sein. Es gilt für $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{(3x^2 - 3y^2)(x^2+y^2)^3 - (x^3 - 3xy^2) \cdot 3(x^2+y^2)^2 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^6} \\ &= \frac{3(x^4 - y^4) - 3 \cdot 2x(x^3 - 3xy^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{3(-x^4 - y^4 + 6x^2y^2)}{(x^2+y^2)^4}, \\ u_y &= \frac{-6xy(x^2+y^2)^3 - (x^3 - 3xy^2) \cdot 3(x^2+y^2)^2 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^6} \\ &= \frac{-6xy(x^2+y^2) - 6y(x^3 - 3xy^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{12(-x^3y + xy^3)}{(x^2+y^2)^4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 3\frac{(-4x^3 + 12xy^2)(x^2+y^2)^4 - (-x^4 - y^4 + 6x^2y^2) \cdot 4(x^2+y^2)^3 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^8} \\ &= 3\frac{4(-x^3 + 3xy^2)(x^2+y^2) - 8x(-x^4 - y^4 + 6x^2y^2)}{(x^2+y^2)^5} \\ &= 12\frac{x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4}{(x^2+y^2)^5}, \\ u_{yy} &= 12\frac{(-x^3 + 3xy^2)(x^2+y^2)^4 - (-x^3y + xy^3) \cdot 4(x^2+y^2)^3 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^8} \\ &= 12\frac{(-x^3 + 3xy^2)(x^2+y^2) - 8y(-x^3y + xy^3)}{(x^2+y^2)^5} \\ &= 12\frac{-x^5 + 10x^3y^2 - 5xy^4}{(x^2+y^2)^5}. \end{aligned}$$

Somit gilt $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, so dass u der Realteil einer in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphen Funktion f sein kann. Dazu muss nun nach den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen gelten

$$v_x = -u_y \qquad \text{und} \qquad v_y = u_x.$$

Also muss gelten

$$v_y = u_x = \frac{3(-x^4 - y^4 + 6x^2y^2)}{(x^2+y^2)^4}.$$

Da u_x symmetrisch in x und y ist, gilt offenbar mit $\tilde{v}(x, y) := u(y, x) = \frac{y^3 - 3x^2y}{(x^2+y^2)^3}$

$$\tilde{v}_y(x, y) = u_x(y, x) = u_x(x, y) = \frac{3(-x^4 - y^4 + 6x^2y^2)}{(x^2+y^2)^4}.$$

Also gilt

$$v = \int v_y \, dy = \tilde{v} + c(x)$$

mit einer Funktion $c : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Damit auch $v_x = -u_y$ erfüllt ist, muss also gelten

$$\begin{aligned} -u_y(x, y) &= v_x(x, y) = \tilde{v}_x(x, y) + c'(x) = u_y(y, x) + c'(x) = \frac{12(-y^3x + yx^3)}{(x^2+y^2)^4} \\ &= -u_y(x, y) + c'(x), \end{aligned}$$

also $c' \equiv 0$. Somit sind für

$$v(x, y) := \tilde{v}(x, y) + c = \frac{y^3 - 3x^2y}{(x^2+y^2)^3} + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ beide Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt, so dass u also Realteil der holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(x + iy) := u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ ist.

Hausaufgabe 2: 2 Punkte

Zeige: Eine reell differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann in $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn[1]

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.$$

Lösung:
Direkte Folgerung aus Blatt 2 HA 5 c) (Darstellung der Wirtinger-Ableitung aus f_x und f_y) und den CRDGen.

Hausaufgabe 3: 6 Punkte

An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen jeweils komplex differenzierbar?

$$f(z) = z\mathrm{Re}(z),\ \ z \in \mathbb{C}, \qquad f(x+iy) = x^3y^2 + ix^2y^3,\ \ x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(z) = z\overline{z} + \frac{z}{\overline{z}},\ \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Lösung:
Im ersten Fall ist $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 + ixy$ und Prüfung der CRDGen $u_x = 2x = x = v_y$ und $u_y = 0 = -y = -v_x$ zeigt, dass auch diese Funktion nur in $z = 0$ komplex differenzierbar ist.
Bei der zweiten Funktion gehen wir analog vor:

$$u_x = 3x^2y^2 = 3x^2y^2 \qquad u_y = 2x^3y = -2xy^3 = -v_x$$

ist genau an allen Stellen $z = x + iy$ komplex diffbar, die

$$x^3y = -xy^3,$$

also $x = 0$ oder $y = 0$ oder $x^2 = -y^2$ (wegen $x, y \in \mathbb{R}$ liefert das keine neuen Stellen) erfüllen. Komplex differenzierbar ist diese Funktion also genau auf den Koordinatenachsen.
Für die dritte Funktion betrachten wir die Wirtinger-Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = z - \frac{z}{\overline{z}^2}.$$

$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)$ ist 0 (was zur komplexen Differenzierbarkeit äquivalent ist, siehe vorhergehende Aufgabe) genau dann, wenn

$$z = \frac{z}{\overline{z}^2}, \qquad \text{also} \qquad \overline{z}^2 = 1,$$

das heißt $z \in \{-1, 1\}$ ist.

Hausaufgabe 4: 3 Punkte

Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei holomorph, reellwertig und erfülle $f(42) = 42$. Bestimme f.

Lösung:
„Reellwertig"bedeutet, dass die Ableitung des (überall verschwindenden) Imaginärteils 0 sind, also muss gleiches für die Ableitungen des Realteils gelten (CRDGen!), die Funktion ist also konstant. Ein Funktionswert ist vorgegeben und wir können $f(z) = 42$ für alle $z \in \mathbb{C}$ folgern.

[1] Für die Definition der Wirtinger-Ableitung $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ siehe HA 5 des zweiten Übungsblattes.

Hausaufgabe 5: 6 Punkte

Wo konvergiert (für $|z| \neq 1$) die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}?$$

Konvergiert sie auf dieser Menge auch kompakt? Auch gleichmäßig?

Lösung:

Für $|z| > 1$ handelt es sich bei den Reihengliedern $\frac{1}{(\frac{1}{z})^n - 1}$ nicht um eine Nullfolge (vgl. Präsenzaufgabe), die Reihe konvergiert also nicht.

Wenn $|z| < R < 1$, so ist für hinreichend große n

$$|(\frac{1}{z})^n - 1| \geq R^{-n} - 1 \geq \frac{1}{2} R^{-n},$$

also $|\frac{z^n}{1-z^n}| = |\frac{1}{(\frac{1}{z})^n - 1} \leq 2R^n$.

Wegen $\sum_{n=0}^{\infty} 2R^n < \infty$ konvergiert die Reihe also nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium auf $B_R(0)$ gleichmäßig. Damit folgt also (mit demselben Argument wie zu Beginn des Beweises von Satz 3.5) kompakte Konvergenz auf $B_1(0)$.

Da $\frac{1}{1-z^n} = \frac{z^n}{1-z^n} + 1$ auf $B_1(0)$ nicht gleichmäßig konvergiert (Präsenzaufgabe), bilden die durch $f_n(z) = \frac{z^n}{1-z^n}$ gegebenen Funktionen keine Nullfolge im Sinne gleichmäßiger Konvergenz auf $B_1(0)$ und die Reihe konvergiert daher nicht gleichmäßig.

Hausaufgabe 6: 10 Punkte

Zeige:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} z^{n-1}$$

konvergiert in $B_1(0)$ und in $\mathbb{C} \setminus B_1(0)$.

Bestimme die Grenzfunktion und weise nach, dass es sich um kompakte Konvergenz handelt.

Tipp: Betrachte das Produkt mit $(1-z)z$.

Lösung:

Dem Tipp folgend werden die einzelnen Summanden zu

$$\frac{z^n - z^{n+1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$$

und wir versuchen wieder, sie mittels Partialbruchzerlegung übersichtlicher zu machen:

$$\frac{z^n - z^{n+1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} = \frac{A}{1-z^n} + \frac{B}{1-z^{n+1}} = \frac{A + B - Az^{n+1} - Bz^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$$

ist für $A = 1$, $B = -1$ erfüllt, sodass

$$z(1-z) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^{n+1}} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z^{N+1}}.$$

Auf $B_1(0)$ konvergiert nun $\frac{1}{1-z^{N+1}}$ gegen 1 (siehe Präsenzaufgabe). Der Grenzwert ist hier

$$\frac{1}{z(1-z)} (\frac{1}{1-z} - 1) = \frac{1}{z(1-z)} \frac{z}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Dass es sich wieder um kompakte Konvergenz handelt, müssen wir noch gesondert nachprüfen. Zwar haben wir in der Präsenzaufgabe gezeigt, dass $\frac{1}{1-z^N}$ kompakt konvergiert, aber wir mussten hier noch mit einer unbeschränkten Funktion multiplizieren.

Wir betrachten also zu $K \subset\subset B_1(0)$ ein derart gewähltes $R \in (0,1)$, dass für alle $z \in K$ auch $|z| < R$ gilt, und bereichnen

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} z^{n-1} - \frac{1}{(1-z)^2}\right| &= \left|\frac{1}{z(1-z)^2} - \frac{1}{z(1-z)(1-z^{N+1})} - \frac{1}{(1-z)^2}\right| \\ &= \left|\frac{1}{z(1-z)} - \frac{1}{(1-z)z(1-z^{N+1})}\right| \\ &= \left|\frac{1-z^{N+1}-1}{z(1-z)(1-z^{N+1})}\right|\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|1-z|} \frac{|z^N|}{|1-z^{N+1}|} \leq \frac{1}{1-R} \frac{1}{1-R^{N+1}} R^N \to 0$$

für $N \to \infty$ und unabhängig von $z \in B_R(0)$ (das war im letzten Schritt bereits abgeschätzt), sodass die Funktionenreihe auf $B_1(0)$ also kompakt konvergiert.

Für $|z| > 1$ konvergiert $\frac{1}{1-z^{N+1}}$ gegen 0, da $|1-z^{N+1}| \geq |z|^{N+1} - 1 \to \infty$, daher ist hier der Reihenwert $\frac{1}{z(1-z)^2}$. Für $K \subset\subset \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$ gibt es $R > 1$, sodass für alle $z \in K$ $|z| > R$ gilt.

Für so großes $N \in \mathbb{N}$, dass $|1 - z^{N+1}| > R^{N+1} - 1 > \frac{1}{2} R^{N+1}$, ist dann

$$\left|\frac{1}{z(1-z)}\left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z^{N+1}}\right) - \frac{1}{z(1-z)^2}\right| = \left|\frac{1}{1-z^{N+1}}\right| < \frac{2}{R^{N+1}} \to 0,$$

daher konvergiert die Reihe auch auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)}$ gleichmäßig, also auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$ kompakt.

(Zusammengenommen kann man damit auch folgern, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} z^{n-1}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ kompakt konvergiert.)