Michael Winkler
Johannes Lankeit

29.4.2014

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 4. Übung

Hausaufgabe 1: 3 Punkte

Es gebe $k \in \mathbb{N}$ derart, dass die Folge $(\frac{a_n}{n^k})_n$ beschränkt ist. Zeige: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hat einen Konvergenzradius $R \geq 1$.

Lösung:
Nach Voraussetzung ist mit einem $C > 0$ dann $|a_n| \leq Cn^k$, also

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{C}(\sqrt[n]{n})^k = 1$$

und damit $R \geq 1$.

Hausaufgabe 2: 8 Punkte

Bestimme die Konvergenzradien von

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})^n (z - 15 + i)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (z + iz)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{(6+8i)^n} (z^2 - 2z + 1)^n$$

sowie von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - 42i)^n$, wobei

$$c_n = \begin{cases} 1, & \text{falls 42 die Zahl } n \text{ teilt} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung:
Für den Konvergenzradius R gilt jeweils nach Satz 3.8

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \limsup \sqrt[n]{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})^n} \\ &= \limsup \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \\ &= \limsup \frac{n^2+n-n^2-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} \\ &= \lim \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

also $R = 2$.

Für die zweite Reihe: Hier ist $a_n z^n = (z + iz)^n = (1+i)^n z^n$, also $a_n = (1+i)^n$ und

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|(1+i)^n|} = \limsup |1+i| = \sqrt{2},$$

also $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bei der dritten Reihe handelt es sich um

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{(6+8i)^n} (z^2 - 2z + 1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{(6+8i)^n} (z-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-1)^k$$

für

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ \frac{\frac{k}{2}+2}{(6+8i)^{\frac{k}{2}}}, & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}.$$

Damit ist

$$\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup \frac{\sqrt[k]{2+\frac{k}{2}}}{\sqrt{|6+8i|}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

also $R = \sqrt{10}$.

Es ist $\sqrt[n]{c_n} = c_n$ und damit $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{c_n} = 1$, also in diesem Fall $R = 1$.

Hausaufgabe 3: 16 Punkte

Bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen und untersuche das Konvergenzverhalten am Rande des Konvergenzkreises:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(z-\sqrt{5}+2i)^{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n)z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}(z+4i)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}(z+4i)^{n^2}$$

Lösung:

i) Die erste Reihe ist sehr ähnlich der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-42)^n$ aus der letzten Aufgabe: Die Koeffizienten springen zwischen 0 und 1 und schließlich ist daher $R = 1$. Falls $|z-\sqrt{5}+2i| = 1$, so bilden wegen $|(z-\sqrt{5}+2i)^{n!}| = |z-\sqrt{5}+2i|^{n!} = 1$ die Reihenglieder keine Nullfolge und die Reihe divergiert daher auf dem gesamten Rand des Konvergenzkreises.

ii) Für $|z| < 1$ ist wegen $|\cos(n)z^n| \leq 1|z|^n$ die geometrische Reihe eine konvergente Majorante. Im Fall $|z| = 1$ erhalten wir

$$|\cos(n)z^n| = |\cos(n)|$$

und weisen nun nach, dass dies keine Nullfolge ist, um auf Divergenz auf dem gesamten Rand des Konvergenzkreises zu schließen.

Behauptung: Es gibt kein $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N_0$ dann $|\cos(n)| < \frac{1}{2}$ gölte. Denn wenn $|\cos(N_0)| < \frac{1}{2}$, dann ist

$$|\cos(2N_0)| = |(\cos(N_0))^2 - (\sin(N_0))^2| = |2(\cos(N_0))^2 - 1| \geq 1 - 2|\cos(N_0)|^2 \geq 1 - 2(\frac{1}{2})^2 \geq 12.$$

iii) Für die dritte Reihe erhalten wir:

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}} = \lim(1+\frac{1}{n})^n = e,$$

also $R = \frac{1}{e}$. Für $|z+4i| = \frac{1}{e}$, also jeden Punkt auf dem Rand des Konvergenzkreises, ist

$$|(1+\frac{1}{n})^{n^2}(z+4i)^n| = (\frac{1}{e})^n(1+\frac{1}{n})^{n^2}.$$

Da dies keine Nullfolge ist, divergiert die Reihe auf dem gesamten Rand des Konvergenzkreises. Dass es keine Nullfolge ist, rechnen wir nach. Wir betrachten dazu

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \log((\frac{1}{e})^n(1+\frac{1}{n})^{n^2}) &= \lim_{n\to\infty}(n\log\frac{1}{e} + n^2\log(1+\frac{1}{n})) \\
&= \lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{\frac{1}{n}} + \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}) \\
&= \lim_{x\searrow 0^+} -\frac{1}{x} + \frac{\log(1+x)}{x^2} \\
&= \lim_{x\searrow 0^+} \frac{\log(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\searrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\searrow 0^+} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

können also $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{e})^n(1+\frac{1}{n})^{n^2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$ folgern.

iv) Den Konvergenzradius der letzten Reihe berechnen wir schließlich (vgl. dritte Reihe aus Hausaufgabe 2) zu

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n^2]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}} = \lim 1 + \frac{1}{n} = 1$$

und stellen für beliebiges z auf dem Rand des Konvergenzkreises, also mit $|z+4i| = R = 1$ fest, dass

$$|(1+\frac{1}{n})^{n^2}(z+4i)^{n^2}| = |1+\frac{1}{n}|^{n^2} \geq 1$$

keine Nullfolge bildet, also die Reihe nicht konvergiert.

Hausaufgabe 4: 2 Punkte

Zeige: Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$ ist mindestens so groß wie das Produkt der Konvergenzradien von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$.

Lösung:

Folgt sofort aus

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n b_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \limsup \sqrt[n]{|b_n|}.$$

Hausaufgabe 5: 3 Punkte

Seien R_A und R_B die Konvergenzradien von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$$

hat einen Konvergenzradius $R \geq \min\{R_A, R_B\}$.

Lösung:

Es sei $|z| < \min\{R_A, R_B\}$. Dann sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ absolut konvergent und damit auch ihr Cauchy-Produkt (vgl. Ana I)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

Also muss $R \geq |z|$ und damit (wegen der Beliebigkeit von z) schließlich $R \geq \min\{R_A, R_B\}$ gelten.

Falls man die Cauchy-Produkt-Formel nur für reelle Zahlen benutzen möchte, füge man überall Betragsstriche hinzu und argumentiere über das Majorantenkriterium, mittels der Abschätzung $|(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) z^n| \leq (\sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}|) |z|^n$, um schließlich absolute Konvergenz der zu untersuchenden Reihe zu erhalten.

Hausaufgabe 6: 4 Punkte

Bestimme den Konvergenzkreis B der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{n}(z-1)^n$.

Zeige, dass $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{n}(z-1)^n$ in B holomorph ist, und bestimme $f'(z)$.

Lösung:

Wegen $\limsup \sqrt[n]{|-\frac{(-1)^n}{n}|} = 1$, ist $B = B_1(1)$ der Konvergenzkreis dieser Reihe.

Alle Potenzreihen sind im Innern ihres Konvergenzkreises holomorph. (Satz 3.9 b)

Die Ableitung bestimmt sich durch Differentiation der einzelnen Summanden:

$$\frac{d}{dz} - \frac{(-1)^n}{n}(z-1)^n = -\frac{(-1)^n}{n} n(z-1)^{n-1} = (1-z)^{n-1},$$

also

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-z)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n = \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}.$$

Hausaufgabe 7: 3 Punkte

Bestimme den Wert von $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$ auf dem Konvergenzkreis dieser Reihe.

Lösung:

Der Konvergenzkreis ist offenbar $B_1(0)$. Für alles Folgende beschränken wir uns auf dieses Gebiet.

Aus der Formel $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ und dem Satz, dass die Ableitung einer Potenzreihe sich durch gliedweise Differentiation ergibt, erhalten wir auch die Formeln

$$\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} = \frac{2}{(1-z)^3}.$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} nz^n = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} + z \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \\ &= \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{2z^2+z-z^2}{(1-z)^3} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.\end{aligned}$$