Michael Winkler
Johannes Lankeit

6.5.2014

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 5. Übung

Hausaufgabe 1: 4+4 Punkte

(a) Zeige mit Hilfe von Definition 1.1, Proposition 3.11 und Präsenzaufgabe 2, dass

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\arg_\Phi(z_1)+\arg_\Phi(z_2))}$$

für $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\Phi \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Bestimme für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\Phi \in \mathbb{R}$ das Inverse z^{-1} in Polarkoordinaten in der Form $z^{-1} = |z^{-1}| \cdot e^{i\cdot\arg_\Phi(z^{-1})}$ so, dass diese Darstellung von z^{-1} nur von $|z|$ und $\arg_\Phi(z)$ abhängt.

Lösung:

(a) Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\Phi \in \mathbb{R}$. Für $j \in \{1, 2\}$ gelte $z_j = x_j + iy_j$ mit $x_j = Re(z_j)$ und $y_j = Im(z_j)$ sowie $\psi_j := \arg_\Phi(z_j)$. Nach PA 2 gilt dann $x_j = |z_j|\cos(\psi_j)$ und $y_j = |z_j|\sin(\psi_j)$. Somit folgt mit Definition 1.1 und Proposition 3.11

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)\\
&= |z_1|\cos(\psi_1)\cdot|z_2|\cos(\psi_2) - |z_1|\sin(\psi_1)\cdot|z_2|\sin(\psi_2)\\
&\quad +i(|z_1|\cos(\psi_1)\cdot|z_2|\sin(\psi_2) + |z_2|\cos(\psi_2)\cdot|z_1|\sin(\psi_1))\\
&= |z_1|\cdot|z_2|\cdot\Big(\cos(\psi_1)\cos(\psi_2) - \sin(\psi_1)\sin(\psi_2)\\
&\quad +i(\cos(\psi_1)\sin(\psi_2) + \cos(\psi_2)\sin(\psi_1))\Big)\\
&= |z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos(\psi_1+\psi_2) + i\cdot\sin(\psi_1+\psi_2))\\
&= |z_1|\cdot|z_2|\cdot e^{i(\psi_1+\psi_2)} = |z_1|\cdot|z_2|\cdot e^{i(\arg_\Phi(z_1)+\arg_\Phi(z_2))}.
\end{aligned}$$

(b) Es seien $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\Phi \in \mathbb{R}$. Dann gilt nach Teil (a)

$$1 = z \cdot z^{-1} = |z|\cdot|z^{-1}|\cdot e^{i(\arg_\Phi(z)+\arg_\Phi(z^{-1}))}.$$

Wegen $|e^{ix}| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ muss daher $|z|\cdot|z^{-1}| = 1$, also $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$, sowie $e^{i(\arg_\Phi(z)+\arg_\Phi(z^{-1}))} = 1$ gelten. Mit Proposition 3.12(a) folgt $i(\arg_\Phi(z) + \arg_\Phi(z^{-1})) = 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, also

$$\arg_\Phi(z^{-1}) = 2k\pi - \arg_\Phi(z)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $\arg_\Phi(z^{-1}) \in [\Phi, \Phi + 2\pi)$ ist gibt es genau ein $k \in \mathbb{Z}$, das diese Bedingung erfüllt. Somit gilt (wegen $e^{2k\pi i} = 1$)

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|}\cdot e^{i(2k\pi-\arg_\Phi(z))} = \frac{1}{|z|}\cdot e^{-i\arg_\Phi(z)}.$$

Hausaufgabe 2: 12 Punkte

Gib die Lösungen jeweils in der Form $z = |z| \cdot e^{i\cdot\arg_0(z)}$ an.

(a) Bestimme alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = 2i$.

(b) Bestimme alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 - \sqrt{3}\, z^2 + 1 = 0$.

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimme alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = 1$. (Die Lösungen dieser Gleichung heißen n-te Einheitswurzeln.)

Lösung:

(a) Nach HA 1 und PA 2 gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 = 2i \quad \Longleftrightarrow \quad |z|^2 e^{2i \arg_0(z)} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Wegen Proposition 3.12 ist dies äquivalent zu $|z|^2 = 2$ und $2i \arg_0(z) = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dies ist nun äquivalent zu $|z| = \sqrt{2}$ und $\arg_0(z) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $\arg_0(z) \in [0, 2\pi)$ sind daher

$$z_1 := \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{und} \quad z_2 := \sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

die Lösungen der Gleichung $z^2 = 2i$.

(b) Mit quadratischer Ergänzung gilt

$$\begin{aligned} z^4 - \sqrt{3}\, z^2 + 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad z^4 - \sqrt{3}\, z^2 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(z^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} i^2 = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad z^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Somit sind die Lösungen der Gleichung $z^4 - \sqrt{3}\, z^2 + 1 = 0$ genau die Lösungen der Gleichungen $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$.
Nach HA 1 und PA 2 gilt für $z \in \mathbb{C}$ wegen $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad |z|^2 e^{2i \arg_0(z)} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Wegen Proposition 3.12 ist dies äquivalent zu $|z|^2 = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ und $2i \arg_0(z) = i\frac{\pi}{6} + 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dies ist nun äquivalent zu $|z| = 1$ und $\arg_0(z) = \frac{\pi}{12} + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $\arg_0(z) \in [0, 2\pi)$ sind daher

$$z_1 := 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{und} \quad z_2 := 1 \cdot e^{i(\frac{\pi}{12}+\pi)} = e^{i\frac{13\pi}{12}}$$

die Lösungen der Gleichung $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.
Analog gilt für $z \in \mathbb{C}$ wegen $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad |z|^2 e^{2i \arg_0(z)} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Wegen Proposition 3.12 ist dies äquivalent zu $|z|^2 = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ und $2i \arg_0(z) = -i\frac{\pi}{6} + 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dies ist nun äquivalent zu $|z| = 1$ und $\arg_0(z) = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $\arg_0(z) \in [0, 2\pi)$ sind daher

$$z_3 := 1 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{12}+\pi)} = e^{i\frac{11\pi}{12}} \quad \text{und} \quad z_4 := 1 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{12}+2\pi)} = e^{i\frac{23\pi}{12}}$$

die Lösungen der Gleichung $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.
Somit sind $z_1, \ldots, z_4$ die Lösungen der Gleichung $z^4 - \sqrt{3}\, z^2 + 1 = 0$.

(c) Nach HA 1 und PA 2 gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$z^n = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |z|^n e^{ni \arg_0(z)} = 1.$$

Wegen Proposition 3.12 ist dies äquivalent zu $|z|^n = 1$ und $ni \arg_0(z) = 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dies ist nun äquivalent zu $|z| = 1$ und $\arg_0(z) = \frac{2k\pi}{n}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $\arg_0(z) \in [0, 2\pi)$ sind daher

$$z_j := 1 \cdot e^{i\frac{2j\pi}{n}} = e^{i\frac{2j\pi}{n}}, \qquad j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

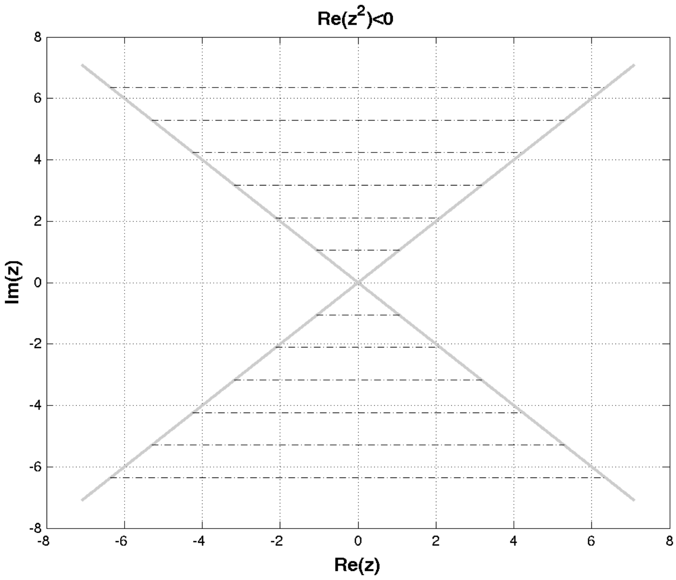
die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$.

Hausaufgabe 3: 2 Punkte

Skizziere die Menge $\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z^2) < 0\}$.

Lösung:

Umschreiben in Polarkoordinaten zeigt, dass $\arg_0(z^2) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ gelten soll (oder eben $\arg_{2\pi}(z^2) \in (\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$). Das gibt dann $\arg_0(z) \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$:



Ausführlicher:

Wir betrachten die Eulersche Formel, d.h. $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Somit ergibt sich zunächst für z^2:

$$\begin{aligned}
z^2 &= r^2(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^2 = r^2(\cos^2(\varphi) + 2i\cos(\varphi)\sin(\varphi) + i^2\sin^2(\varphi)) \\
&= r^2(\cos^2(\varphi) + 2i\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \sin^2(\varphi)) \\
&= (r^2\cos^2(\varphi) - r^2\sin^2(\varphi)) + i(2r^2 cos(\varphi)\sin(\varphi)) \\
\Rightarrow &\quad \mathrm{Re}(z^2) = r^2(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi))
\end{aligned}$$

Es ist r^2 immer positiv, somit betrachten wir für $\mathrm{Re}(z^2) < 0$ nur den zweiten Faktor. Hierfür gilt dann $\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) < 0$ genau dann, wenn $\cos^2(\varphi) < \sin^2(\varphi)$ bzw. $|\cos(\varphi)| < |\sin(\varphi)|$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\varphi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ oder $\varphi \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

Hausaufgabe 4: 6 Punkte

Wo erfüllt

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, wo ist f komplex differenzierbar?

Lösung:

Außerhalb von $z = 0$ handelt es sich um die Komposition der komplex differenzierbaren Funktionen $z \mapsto \frac{1}{z^4}$ und exp, f ist dort also komplex diffbar und erfüllt auch die CRDGen.

In $z = 0$ betrachten wir zunächst die partiellen Ableitungen des Realteils:

$$|u_x(0,0)| = \lim_{h\to 0} |\frac{\mathrm{Re}(e^{-\frac{1}{((0+h)+i0)^4}}) - \mathrm{Re}(0)}{h}| = \lim_{h\to 0} |\frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^4}}| = \lim_{x\to\infty} xe^{-x^4} = 0$$

$$|u_y(0,0)| = \lim_{h\to 0} |\frac{\mathrm{Re}(e^{-\frac{1}{(0+i(0+h))^4}}) - \mathrm{Re}(0)}{h}| = \lim_{h\to 0} |\frac{1}{h} e^{-\frac{1}{i^4 h^4}}| = \lim_{h\to 0} |\frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^4}}| = 0$$

Entsprechend verfahren wir mit dem Imaginärteil. Für $0 \neq x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist aber

$$\frac{1}{(x+iy)^2} = \frac{(x-iy)^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 - i2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

reell, wann immer $x = 0$ oder $y = 0$; entsprechendes gilt also für $e^{-(\frac{1}{z^2})^2}$, sodass $\mathrm{Im}(e^{-\frac{1}{z^4}}) = 0$ für $\mathrm{Re}(z) = 0$ oder $\mathrm{Im}(z) = 0$. Damit ist aber

$$v_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0 = v_y(0,0),$$

also sind in $z = 0$ die CRDGen erfüllt.

Dennoch ist f dort nicht komplex differenzierbar (und das heißt in diesem Fall also auch: nicht reell differenzierbar), denn f ist dort nicht einmal stetig.

Betrachte für $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}(1+i)) \neq 0 = f(0)$. Es ist $(\frac{1}{n}(1+i))^4 = \frac{1}{n^4}(-4)$, also für $n \to \infty$

$$f(\frac{1}{n}(1+i)) = e^{\frac{1}{4}n^4} \to \infty.$$