Michael Winkler
Johannes Lankeit

13.5.2014

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 6. Übung

Hausaufgabe 1: 4 Punkte

Berechne (mit den Bezeichnungen aus den Definitionen 3.17 und 3.26 der Vorlesung)

a) $\ln(1+i)$, $\quad \ln(e^{8i+42})$.

(b) $\left(\sqrt{-i}\right)^{3i}$, $\quad \sqrt{(1+i)^{5i}}$.

Lösung:

a)

$$\ln(1+i) = \ln|1+i| + i\mathrm{arg}_0(1+\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}$$
$$\ln(e^{8i+42}) = \ln|e^{8i+42}| + i\mathrm{arg}_0(\mathrm{e}^{8\mathrm{i}+42}) = \ln(\mathrm{e}^{42}) + \mathrm{i}\mathrm{arg}_0(\mathrm{e}^{8\mathrm{i}}) = 42 + \mathrm{i}(8-2\pi)$$

b)

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{-i}\right)^{3i} &= \left(e^{\frac{1}{2}\ln(-i)}\right)^{3i} = \left(e^{\frac{1}{2}(\ln(|-i|)+i\cdot\arg_{-\pi}(-i))}\right)^{3i} = \left(e^{\frac{1}{2}(\ln(1)-i\cdot\frac{\pi}{2})}\right)^{3i} \\
&= \left(e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}\right)^{3i} = e^{3i\cdot\ln\left(e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}\right)} = e^{3i\cdot\left(-i\cdot\frac{\pi}{4}\right)} = e^{\frac{3\pi}{4}} = e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot e^{i\cdot 0}, \\
\sqrt{(1+i)^{5i}} &= \sqrt{e^{5i\cdot\ln(1+i)}} = \sqrt{e^{5i\cdot(\ln(|1+i|)+i\cdot\arg_{-\pi}(1+i))}} = \sqrt{e^{5i\cdot(\ln(\sqrt{2})+i\cdot\frac{\pi}{4})}} \\
&= \sqrt{e^{i\cdot 5\ln(\sqrt{2})-\frac{5\pi}{4}}} = \sqrt{e^{-\frac{5\pi}{4}}\cdot e^{i\cdot 5\ln(\sqrt{2})}} = e^{\frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^{-\frac{5\pi}{4}}\cdot e^{i\cdot 5\ln(\sqrt{2})}\right)} \\
&= e^{\frac{1}{2}\cdot\left(\ln\left|e^{-\frac{5\pi}{4}}\cdot e^{i\cdot 5\ln(\sqrt{2})}\right|+i\cdot\arg_{-\pi}\left(e^{-\frac{5\pi}{4}}\cdot e^{i\cdot 5\ln(\sqrt{2})}\right)\right)} = e^{\frac{1}{2}\cdot\left(\ln\left(e^{-\frac{5\pi}{4}}\right)+i\cdot 5\ln(\sqrt{2})\right)} \\
&= e^{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5\pi}{4}+i\cdot 5\ln(\sqrt{2})\right)} = e^{-\frac{5\pi}{8}}\cdot e^{i\cdot\frac{5\ln(\sqrt{2})}{2}},
\end{aligned}$$

da $5\ln(\sqrt{2}) = \frac{5}{2}\ln(2) \in [0,\frac{5}{2}) \subset [-\pi,\pi)$ gilt.

Hausaufgabe 2: 4 Punkte

Gib ein maximales Gebiet an, auf dem $\sqrt{z+\sqrt{z}}$ als holomorphe Funktion definiert werden kann.

Lösung:

Auf $G = \mathbb{C}^-$ definieren wir mit dem Hauptzweig des Logarithmus die Wurzel wie in 3.26.
Für $z = re^{i\varphi} \in G$ mit $\varphi \in (-\pi,\pi)$ ist auch

$$z + \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}(1+\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}) \in G,$$

daher erhalten wir mit $z \mapsto \sqrt{z+\sqrt{z}}$ eine auf G wohldefinierte holomorphe Funktion.
Angenommen nun, es gäbe ein größeres Gebiet $\widehat{G} \supsetneq G$ sowie eine holomorphe Funktion $\widehat{f}\colon G \to \mathbb{C}$ darauf mit

$$\widehat{f}(z) = \widehat{\sqrt{z+\widehat{\sqrt{z}}}}.$$

Dann wäre aber auch

$$z \mapsto \widehat{f}(z))^2 - z = \widehat{\sqrt{z}}$$

holomorph auf $\widehat{G}$.
Insbesondere müsste es eine holomorphe Fortsetzung der Wurzel auf dieses Gebiet geben. Das enthält aber $z \in \widehat{G} \cap (-\infty, 0)$ und mit demselben Argument wie in Präsenzaufgabe 3 bzw. Bemerkung 3.28 erhielten wir einen Widerspruch. Daher ist G maximal.

Hausaufgabe 3: 3 Punkte

Es sei $g : B_1(1) \to \mathbb{C}$, $g(z) := \ln(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ für $z \in B_1(1)$.
Zeige, dass die Funktion g konstant ist.
Folgere daraus, dass $\ln(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ für $z \in B_1(1)$ gilt.

Lösung:
Die Ableitung von $z \mapsto \ln(z)$ ist $z \mapsto \frac{1}{z}$ (nach Prop. 3.19), die von $z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ auch (vgl. Blatt 4, Hausaufgabe 6), damit hat g die Ableitung 0 und ist mithin konstant (wie man beispielsweise durch Anwendung des Schrankensatzes auf $\mathrm{Re}(g)$ und $\mathrm{Im}(g)$ als Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nachweisen kann).
Da $\ln(1) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(1-1)^n$, ist $g(1) = 0$, also (da konstant) $g \equiv 0$ und es folgt die Behauptung.

Hausaufgabe 4: 3 Punkte

Zeige: Für alle $z \in \mathbb{C}$ (für die beide Seiten definiert sind) ist $\log(z) \neq \log(-z)$. Was ist an folgendem Argument (das Johann Bernoulli verwendet haben soll) falsch?

$$\log((-z)^2) = \log(z^2) \quad\Longrightarrow\quad 2\log(-z) = 2\log(z) \quad\Longrightarrow\quad \log(-z) = \log(z).$$

Lösung:
Da beide Seiten definiert sind, ist offenbar $z \neq 0$. Für jeden Logarithmus gilt $\exp \circ \log = id$, also würde aus $\log(z) = \log(-z)$ auch $z = \exp\log(z) = \exp\log(-z) = -z$ und damit $z = 0$ folgen.
Die erste Implikation des Arguments stimmt nicht, vergleiche auch Prop. 3.21. Man könnte auch sagen, im zweiten Ausdruck fehle auf einer Seite $+2\pi i$.

Hausaufgabe 5: 4+3+2 Punkte

a) Zeige: Die Funktion

$$g\colon \mathbb{C}^- \to \mathbb{C} \setminus \{z \in i\mathbb{R};\ |z| \geq 1\}, \qquad z \mapsto \frac{1}{i}\frac{z-1}{z+1}$$

ist wohldefiniert und biholomorph (d.h. die Funktion ist bijektiv und Funktion sowie Umkehrfunktion sind holomorph). Bestimme ihre Umkehrfunktion explizit.

b) Zeige, indem du ihn als Komposition geeigneter Funktionen schreibst, dass der Tangens tan auf der Menge $\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ biholomorph ist.

c) Mit ln als Hauptzweig des Logarithmus setze

$$\arctan\colon \mathbb{C} \setminus \{z \in i\mathbb{R};\ |z| \geq 1\} \to \mathbb{C}, \quad w \mapsto \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right).$$

Zeige: arctan ist wohldefiniert, holomorph und kehrt tan um.

Lösung:

a) Angenommen, $g(z) = \lambda i$ für ein $z \in \mathbb{C}^-$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| \geq 1$. Dann wäre

$$g(z) = \frac{1}{i}\frac{z-1}{z+1} = i\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad (z-1) = -\lambda(z+1) \quad \Longleftrightarrow \quad z = \frac{1-\lambda}{1+\lambda},$$

d.h. $z \in \mathbb{R}$ mit $z \leq 0$. Also ist g wohldefiniert.

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, löse $w = \frac{1}{i}\frac{z-1}{z+1}$ nach z auf und erhalte $z = \frac{1+iw}{1-iw}$. $h\colon w \mapsto \frac{1+iw}{1-iw}$ bestimmt eine wohldefinierte Funktion von $\mathbb{C} \setminus \{w \in i\mathbb{R};\ |w| \geq 1\}$ nach $\mathbb{C}^-$, denn wäre $\frac{1+iw}{1-iw} = z \in (-\infty, 0]$, folgte sofort $iw = \frac{z-1}{z+1}$ und damit $w \in i\mathbb{R}$ und wegen $z \leq 0$ auch $|w| = |\frac{z-1}{z+1}| = \frac{|z|+1}{|z+1|} \geq 1$.

Es ist

$$g \circ h(w) = \frac{1}{i}\frac{\frac{1+iw}{1-iw} - 1}{\frac{1+iw}{1-iw} + 1} = \frac{1}{i}\frac{1+iw-1+iw}{1+iw+1-iw} = w$$

und

$$h \circ g(z) = \frac{1 + i\frac{1}{i}\frac{z-1}{z+1}}{1 - i\frac{1}{i}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1+z-1}{z+1-z+1} = z,$$

also ist g bijektiv und h die Umkehrfunktion von g.

Die Holomorphie (sowohl von g als auch von h) ist klar.

b) Es ist

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{1}{i}\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1},$$

also

$$\tan = g \circ \exp \circ f,$$

wobei

$$f\colon \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\} \to \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\}, z \mapsto 2iz$$

offenbar biholomorph ist und

$$\exp\colon \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\} \to \mathbb{C}^-$$

dort gerade vom Hauptzweig des Logarithmus umgekehrt wird und demzufolge ebenfalls eine biholomorphe Funktion darstellt.

Die Biholomorphie von $g\colon \mathbb{C}^- \to \mathbb{C} \setminus \{z \in i\mathbb{R};\ |z| \geq 1\}$ haben wir in a) nachgewiesen.

c) Die Umkehrfunktion von $\tan = g \circ \exp \circ f$ wird entsprechend durch

$$z \mapsto f^{-1}(\exp^{-1}(g^{-1}(z))) = f^{-1}(\ln(h(z))) = \frac{1}{2i}(\ln(\frac{1+iz}{1-iz})) =: \arctan z$$

gegeben. (Alle weiteren Argumente: siehe b))

Hausaufgabe 6: 8 Punkte

Sei G ein Gebiet. Von einer holomorphen Funktion $g\colon G \to \mathbb{C}$ sagt man, sie habe in $a \in G$ eine Nullstelle k-ter Ordnung (für ein $k \in \mathbb{N}$), wenn eine auf G holomorphe Funktion $\widetilde{g}$ existiert, sodass $g(z) = (z-a)^k \widetilde{g}(z)$ und $\widetilde{g}(a) \neq 0$.

Beweise: Auf dem Gebiet G sei die holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ gegeben, die in $z_0 \in G$ eine Nullstelle n-ter Ordnung habe. Genau dann kann man in einer Umgebung von z_0 eine holomorphe k-te Wurzel (mit $k \in \mathbb{N}$) aus f ziehen, wenn k ein Teiler von n ist. (Eine holomorphe k-te Wurzel aus f ist dabei eine holomorphe Funktion g mit $(g(z))^k = f(z)$ für alle z aus ihrem Definitionsbereich.)

Verwende dazu (ohne Beweis) die folgenden Aussagen:

Sei G ein konvexes Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ohne Nullstelle. Dann existiert eine holomorphe Funktion $h\colon G \to \mathbb{C}$, sodass

$$e^{h(z)} = f(z) \qquad \forall z \in G.$$

(Diesen Satz werden wir mit Mitteln des fünften Kapitels beweisen können.)

Wenn eine holomorphe Funktion an einer Stelle z_0 eine Nullstelle hat, so handelt es sich bei z_0 um eine Nullstelle k-ter Ordnung für ein $k \in \mathbb{N}$. (Das folgt aus Aussagen des sechsten Kapitels.)

Lösung:
Sei g in einer Umgebung von z_0 definierte k-te Wurzel. Sicherlich ist $g(z_0) = 0$ und damit hat g in z_0 eine Nullstelle der Ordnung m für ein $m \in \mathbb{N}$, also gilt für eine holomorphe Funktion $\widetilde{g}$ mit $\widetilde{g}(z_0) \neq 0$

$$g(z) = (z - z_0)^m \widetilde{g}(z).$$

Es folgt

$$f(z) = (g(z))^k = (z - z_0)^{mk} (\widetilde{g}(z))^k,$$

worin $z \mapsto (\widetilde{g}(z))^k$ holomorph ist und $(\widetilde{g}(z_0))^k \neq 0$. Also hat f in z_0 eine Nullstelle der Ordnung $n = mk$, insbesondere ist k ein Teiler von n.
Sei nun k ein Teiler von n, also $n = km$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Mit einer holomorphen Funktion $\widetilde{f}$ mit $\widetilde{f}(z_0) \neq 0$, also $\widetilde{f}(z) \neq 0$ für alle $z \in B_\varepsilon(z_0)$ (mit $\varepsilon > 0$) lässt sich f schreiben als

$$f(z) = (z - z_0)^{km} \widetilde{f}(z).$$

Wegen der Nullstellenfreiheit von $\widetilde{f}$ gibt es (nach einem der Hinweise und wegen der Konvexität von $B_\varepsilon(z_0)$) eine Funktion $h\colon B_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$, sodass $\widetilde{f} = \exp \circ h$.
Setze demnach

$$g(z) = (z - z_0)^m e^{\frac{1}{k} h(z)}.$$

Dann ist offenbar g holomorph und für alle z aus einer Umgebung von z_0

$$(g(z))^k = (z - z_0)^{mk} e^{h(z)} = (z - z_0)^n \widetilde{f}(z) = f(z).$$