Michael Winkler
Johannes Lankeit

20.5.2014

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 7. Übung

Hausaufgabe 1: 3+3+4+4+4 Punkte

Berechne die folgenden Kurvenintegrale.

(a) $\int_{[0,4i]} z^2\,dz$,

(b) $\int_\gamma z^2\,dz$ mit $\gamma(t) := 2i + 2e^{it}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

(c) $\int_\gamma \ln(z)\,dz$ mit $\gamma(t) := \begin{cases} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot t & \text{für } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ e^{i(\frac{\pi}{4} - (t-1))} & \text{für } t \in (1, 1+\frac{\pi}{2}], \end{cases}$

(d) $\int_\gamma \sin(z)\,dz$ mit $\gamma(t) := \begin{cases} t^2 + i \cdot e^t & \text{für } t \in [0,1], \\ 1 + i \cdot (e + 1 - t) & \text{für } t \in (1, e], \\ \cos(t-e) + i \cdot (1 - \frac{4(t-e)}{\pi}) & \text{für } t \in \left(e, e+\frac{\pi}{2}\right], \end{cases}$

(e) $\int_\gamma e^z\,dz$ mit $\gamma(t) := \begin{cases} e^{\pi i t} & \text{für } t \in [0,1], \\ -t + i \cdot \ln(t) & \text{für } t \in (1, e], \\ -e^{t-e+1} + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + (t-e)\pi\right) & \text{für } t \in (e, e+5]. \end{cases}$

Lösung:

(a) Der Weg $[0,4i]$ lässt sich parametrisieren durch die Funktion $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := t \cdot 4i$ für $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{[0,4i]} z^2\,dz &= \int_0^1 (\gamma(t))^2 \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (\gamma(t))^2 \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}\frac{1}{3}(\gamma(t))^3\,dt \\ &= \frac{1}{3}(t \cdot 4i)^3\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{3}\left((4i)^3 - 0\right) = \frac{1}{3} \cdot 64i^3 = -\frac{64}{3} \cdot i. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma z^2\,dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\gamma(t))^2 \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2i + 2e^{it}\right)^2 \cdot 2i \cdot e^{it}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\left(2i + 2e^{it}\right)^3\Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\left((2i+2i)^3 - (2i-2i)^3\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (4i)^3 = \frac{1}{3} \cdot 64i^3 = -\frac{64}{3} \cdot i. \end{aligned}$$

(c) Wegen $\gamma^* \subset \mathbb{C}^-$ ist ln stetig auf γ^* und das Kurvenintegral wohldefiniert. Es gilt mit $g(z) := z \cdot \ln(z) - z$, $z \in \mathbb{C}^-$, nach Proposition 3.19

$$g'(z) = 1 \cdot \ln(z) + z \cdot \frac{1}{z} - 1 = \ln(z), \qquad z \in \mathbb{C}^-.$$

Daher gilt mit Proposition 4.8 wegen $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \ln(z)\,dz &= \int_{\frac{1}{2}}^{1+\frac{\pi}{2}} \ln(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt + \int_{1}^{1+\frac{\pi}{2}} \ln(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot t\right)\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,dt \\
&\quad + \int_{1}^{1+\frac{\pi}{2}} \ln\left(e^{i(\frac{\pi}{4}-(t-1))}\right)\cdot(-i)\cdot e^{i(\frac{\pi}{4}-(t-1))}\,dt \\
&= \left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot t\right)\cdot\ln\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot t\right)-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot t\right)\right]\Bigg|_{t=\frac{1}{2}}^{t=1} \\
&\quad + \left[e^{i(\frac{\pi}{4}-(t-1))}\cdot\ln\left(e^{i(\frac{\pi}{4}-(t-1))}\right)-e^{i(\frac{\pi}{4}-(t-1))}\right]\Bigg|_{t=1}^{t=1+\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\ln\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1+i}{\sqrt{2}}-\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\cdot\ln\left(\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{1+i}{2\sqrt{2}} \\
&\quad + e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot\ln\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)-e^{-i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)+e^{i\frac{\pi}{4}} \\
&= -\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)+\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot\ln\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)-e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
&= -\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)+i\cdot\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot\left(\ln(1)-i\cdot\frac{\pi}{4}\right)-e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
&= -\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)-1+i\cdot\frac{\pi}{4}\right)+e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot\left(-1-i\cdot\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

(d) Es gilt mit Proposition 4.8

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \sin(z)\,dz &= \int_0^{e+\frac{\pi}{2}} \sin(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \sin\left(t^2+i\cdot e^t\right)\cdot\left(2t+i\cdot e^t\right)\,dt \\
&\quad + \int_1^e \sin(1+i\cdot(e+1-t))\cdot(-i)\,dt \\
&\quad + \int_e^{e+\frac{\pi}{2}} \sin\left(\cos(t-e)+i\cdot\left(1-\frac{4(t-e)}{\pi}\right)\right)\cdot\left(-\sin(t-e)-i\cdot\frac{4}{\pi}\right)\,dt \\
&= -\cos\left(t^2+i\cdot e^t\right)\Big|_{t=0}^{t=1}-\cos(1+i\cdot(e+1-t))\Big|_{t=1}^{t=e} \\
&\quad -\cos\left(\cos(t-e)+i\cdot\left(1-\frac{4(t-e)}{\pi}\right)\right)\Bigg|_{t=e}^{t=e+\frac{\pi}{2}} \\
&= -\cos(1+i\cdot e)+\cos(i)-\cos(1+i)+\cos(1+i\cdot e) \\
&\quad -\cos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot(1-2)\right)+\cos\left(\cos(0)+i\right) \\
&= \cos(i)-\cos(-i)=0
\end{aligned}$$

wegen $\cos(z)=\cos(-z)$ für alle $z\in\mathbb{C}$ nach Definition 3.10.

(e) Es gilt mit Proposition 4.8

$$\begin{aligned}
\int_\gamma e^z\,dz &= \int_0^{e+5} e^{\gamma(t)}\cdot\gamma'(t)\,dt\\
&= \int_0^1 e^{e^{\pi it}}\cdot\pi i\cdot e^{\pi it}\,dt + \int_1^e e^{-t+i\cdot\ln(t)}\cdot\left(-1+\frac{i}{t}\right)\,dt\\
&\quad+\int_e^{e+5} e^{-e^{t-e+1}+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+(t-e)\pi\right)}\cdot\left(-e^{t-e+1}+i\cdot\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+(t-e)\pi\right)\right)\,dt\\
&= e^{e^{\pi it}}\Big|_{t=0}^{t=1} + e^{-t+i\cdot\ln(t)}\Big|_{t=1}^{t=e} + e^{-e^{t-e+1}+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+(t-e)\pi\right)}\Big|_{t=e}^{t=e+5}\\
&= e^{-1}-e^1+e^{-e+i}-e^{-1}+e^{-e^6+i\cdot\sin\left(\frac{11\pi}{2}\right)}-e^{-e+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\\
&= -e+e^{-e^6-i}.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 2: 2 Punkte

Es seien $\gamma_1,\gamma_2\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ geschlossene stückweise glatte Wege mit einem gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt. Definiere einen Weg $\gamma_1\cdot\gamma_2:=\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t), & t\in[0,\frac{1}{2}),\\ \gamma_2(2t-1), & t\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

Sei $z\in\mathbb{C}\setminus(\gamma_1^*\cup\gamma_2^*)$.

Zeige

$$n(\gamma,z)=n(\gamma_1,z)+n(\gamma_2,z).$$

Lösung:

Wir setzen obige Definition für γ in die der Umlaufzahl ein und erhalten mit den Substitutionen $\tau=2t$ und $s=2t-1$

$$\begin{aligned}
2\pi in(\gamma,z) &= \int_\gamma \frac{1}{\zeta-z}d\zeta\\
&= \int_0^1 \frac{1}{\gamma(t)-z}\gamma'(t)dt\\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\gamma_1(2t)-z}2\gamma_1'(2t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\gamma_2(2t-1)-z}2\gamma_2'(2t-1)\ \mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{1}{\gamma_1(\tau)-z}2\gamma_1'(\tau)\frac{1}{2}d\tau + \int_0^1 \frac{1}{\gamma_2(s)-z}2\gamma_2'(s)\frac{1}{2}\ \mathrm{d}s\\
&= \int_{\gamma_1}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta + \int_{\gamma_2}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta\\
&=2\pi in(\gamma_1,z)+2\pi in(\gamma_2,z).
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 3: 4 Punkte

Finde einen Weg γ derart, dass

$$n(\gamma,1)=1\qquad\text{und}\qquad n(\gamma,2)=2$$

gelten, und weise diese beiden Eigenschaften nach.

Tipp: Bevor du „besonders hässliche“ Integrale ausrechnest, möchtest du vielleicht zunächst andere Argumentationen nutzen oder gar einen einfacheren Weg suchen.

Lösung:

Definiere beispielsweise den glatten Weg

$$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{5}{2}e^{4\pi i t}, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 + \frac{1}{2}e^{4\pi i t}, & t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

also (mit der Betrachtungsweise der vorangegangenen Aufgabe) $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$, wobei $\gamma_1(t) = \frac{5}{2}e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$, und $\gamma_2(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$. Nun lässt sich die Umlaufzahl am leichtesten als Summe der Umlaufzahlen bezüglich γ_1 und γ_2 berechnen. Dabei ist nach Satz 4.14 b)

$$n(\gamma_1, 1) = n(\gamma_1, 2) = n(\gamma_1, 0) = 1,$$

da 1,2,0 in derselben Komponente (nämlich $B_{\frac{5}{2}}(0)$) von $\mathbb{C} \setminus \gamma_1^*$ liegen. Das Ergebnis 1 ergibt sich aus derselben Rechnung wie in Proposition 4.12 oder Präsenzaufgabe 3. Mit derselben Rechnung überzeugt man sich auch von $n(\gamma_2, 2) = 1$.

Wegen $1 \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{\frac{1}{2}}(2)}$ und Satz 4.14 c) ist $n(\gamma_2, 1) = 0$.

Insgesamt ergibt sich damit

$$n(\gamma, 1) = n(\gamma_1, 1) + n(\gamma_2, 1) = 1 + 0 = 1, \qquad n(\gamma, 2) = n(\gamma_1, 2) + n(\gamma_2, 2) = 1 + 1 = 2.$$

Hausaufgabe 4: 3 Punkte

Gegeben sei der Weg $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t) = i \arctan(\sqrt{2 + \sin(4t)\cos(2t)} - 8) + \frac{(\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2})^2}{12 + \cos(t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n i^n}{n!}.$$

Zeige: Es handelt sich um einen stückweise glatten geschlossenen Weg.

Bestimme $n(\gamma, 42i)$.

Lösung:

Der Weg ist glatt als Komposition differenzierbarer Funktionen: Potenzreihe, Polynom, Quotient mit nichtverschwindendem Nenner, trigonometrische Funktionen und Wurzel mit nur positivem Argument.

Geschlossen: $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. Es ist $(\frac{2\pi}{2\pi} - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} = (0 - \frac{1}{2})^2$ und sin und cos sind bekanntermaßen 2π-periodisch. Weiter nimmt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n i^n}{n!} = e^{it} - 1$$

ebenfalls für $t = 0$ und für $t = 2\pi$ denselben Wert an.

Da für alle $t \in [0, 2\pi]$ gilt, dass

$$\begin{aligned} |\gamma(t)| =& |i \arctan(\sqrt{2 + \sin(4t)\cos(2t)} - 8) + \frac{(\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2})^2}{12 + \cos(t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n i^n}{n!}| \\ \leq& |\arctan(\sqrt{2 + \sin(4t)\cos(2t)} - 8)| + |\frac{(\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2})^2}{12 + \cos(t)}| + |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n i^n}{n!}| \\ \leq& \frac{\pi}{2} + |\frac{\frac{1}{4}}{11}| + |e^{it} - 1| \\ \leq& 2 + 1 + 1 + 1 = 5, \end{aligned}$$

liegt $42i$ wegen $|42i| = 42 > 5 > |\gamma(t)|$ für alle $t \in [0, 2\pi]$ sicherlich in einer unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Daher ist $n(\gamma, 42i) = 0$.