Michael Winkler
Johannes Lankeit

27.5.2014

Lösungsvorschlag zu den Hausaufgaben der 8. Übung

Hausaufgabe 1: 2+2 Punkte

Zeige:

a) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig.

b) Jede sternförmige Menge ist zusammenhängend.

Lösung:

a) Angenommen, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ wäre Zentrum. Mit z ist auch $-z$ Element von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Strecke von z zu $-z$ liegt aber nicht in der Menge, da sie 0 enthält. - Widerspruch.

b) Sie ist sogar wegzusammenhängend. Sei z_0 Zentrum. Gegeben x, y liegt der Polygonzug von x über z_0 nach y in der Menge und verbindet x mit y.

Hausaufgabe 2: je 3 Punkte

Berechne die folgenden Integrale:

$$a) \int_{\partial B_1(2i)} \frac{e^{z^2}}{2i-z} dz, \qquad b) \int_{\partial B_\pi(0)} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1} dz,$$

$$c) \int_{\partial B_{\frac{3}{2}}(i-4)} \frac{\zeta^2 - 4\zeta + 7}{(\zeta-1)(\zeta+3)(\zeta-i)} d\zeta, \qquad d) \int_{\partial B_1(0)} \frac{|z|}{z} dz,$$

$$e) \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{|z|} dz, \qquad f) \int_{\partial B_3(0)} \frac{z e^{\pi z}}{(z^2+4)(z^2+1)} dz.$$

Lösung:

Wie in der Präsenzaufgabe werden wir fleißig von der Cauchyschen Integralformel Gebrauch machen:

$$\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z),$$

wenn f holomorph und $z \in B_r(z_0)$.

a) $f(z) = -e^{z^2}$, $z = 2i$; Integral: $-2\pi i e^{-4}$.

b) $\frac{\cos(\pi z)}{z^2-1} = -\frac{1}{2}\frac{\cos(\pi z)}{z+1} + \frac{1}{2}\frac{\cos(\pi z)}{z-1}$, daher

$$\int_{\partial B_\pi(0)} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1} dz = -\frac{1}{2}\int_{\partial B_\pi(0)} \frac{\cos(\pi z)}{z+1} dz + \frac{1}{2}\int_{\partial B_\pi(0)} \frac{\cos(\pi z)}{z-1} dz = -\frac{1}{2}(2\pi i)\cos(-\pi) + \frac{1}{2}(2\pi i)\cos(\pi 1) = 0$$

c) Während $-3 \in B_{\frac{3}{2}}(i-4)$, gilt $1, i \notin B_{\frac{3}{2}}(i-4)$, sodass wir $f(z) = \frac{\zeta^2-4\zeta+7}{(\zeta-1)(\zeta-i)}$ wählen können und damit

$$\int_{\partial B_{\frac{3}{2}}(i-4)} \frac{\zeta^2 - 4\zeta + 7}{(\zeta-1)(\zeta+3)(\zeta-i)} d\zeta = 2\pi i \frac{(-3)^2 - 4(-3) + 7}{(-3-1)(-3-i)} = 2\pi i \frac{28}{4(3+i)} = \frac{(7+21i)\pi}{5}.$$

d) Auf der betrachteten Menge ist $|z|=1$ und daher das Integral, wie bekannt, gleich $2\pi i$.

e) 0 nach Cauchyschem Integralsatz. Zumindest, sobald man sich den Integranden als 1 umgeschrieben hat (dann hat man es nämlich mit einer auf $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion zu tun).

f) Partialbruchzerlegung (hier mit Probe; das LGS zum Berechnen ist nicht kompliziert):

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z^2+4)(z^2+1)} = \frac{-\frac{1}{12}i}{z+2i} + \frac{\frac{1}{6}i}{z+i} + \frac{-\frac{1}{6}i}{z-i} + \frac{\frac{1}{12}i}{z-2i} &= -\frac{i}{12}\left(\frac{1}{z+2i} - \frac{2}{z+i} + \frac{2}{z-i} - \frac{1}{z-2i}\right)\\ &= -\frac{i}{12}\left(\frac{z-2i-z-2i}{z^2+4} - \frac{2z-2i-2z-2i}{z+i}\right)\\ &= -\frac{i^2}{3}\left(\frac{1}{z^2+4} - \frac{1}{z^2+1}\right) = \frac{1}{3}\frac{z^2+1-z^2-4}{(z^2+4)(z^2+1)} = \frac{1}{(z^2+4)(z^2+1)}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir dann aus der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_3(0)} \frac{ze^{\pi z}}{(z^2+4)(z^2+1)}dz =& \frac{-i}{12}\left(\int_{\partial B_3(0)} \frac{ze^{\pi z}}{z+2i}dz - 2\int_{\partial B_3(0)} \frac{ze^{\pi z}}{z+i}dz + 2\int_{\partial B_3(0)} \frac{ze^{\pi z}}{z-i}dz - \int_{\partial B_3(0)} \frac{ze^{\pi z}}{z-2i}dz\right)\\ =& \frac{-i2\pi i}{12}((-2i)e^{-2i\pi} - 2(-i)e^{\pi(-i)} + 2ie^{\pi i} - (2i)e^{\pi 2i})\\ =& \frac{\pi}{6}(-2i-2i-2i-2i) = -\frac{4\pi}{3}i.\end{aligned}$$

Hausaufgabe 3: 2+3+1+3 Punkte

Für $a>0$ und $R>0$ bezeichne $\gamma_{a,R}$ den Weg, der nacheinander durch folgende Strecken angegebenen Teilwege durchläuft:

$$\gamma_{1,a,R} : [-R,R], \quad \gamma_{2,a,R} : [R, R+ia], \quad \gamma_{3,a,R} : [R+ia, -R+ia], \quad \gamma_{4,a,R} : [-R+ia, -R].$$

a) Berechne für $a>0$, $R>0$ das Integral $\int_{\gamma_{a,R}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z$.

b) Zeige, dass für jedes $a>0$

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_{2,a,R}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z\right| = \lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_{4,a,R}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z\right| = 0.$$

c) Folgere für $a>0$, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ia)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}.$$

d) Zeige

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(ax)dx = \frac{1}{2}e^{-\frac{a^2}{2}}\sqrt{2\pi}.$$

Lösung:

a) Geschlossener Weg, auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion; Cauchyscher Integralsatz: Das Integral ist 0.

b) Sei $a>0$. Wir nutzen die Standardabschätzung (Satz 4.10)

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_{2,a,R}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z\right| \le& L(\gamma_{2,a,R}) \sup_{z\in\gamma^*_{2,a,R}} |e^{-\frac{z^2}{2}}|\\ =& a\sup_{t\in[0,1]} |e^{-\frac{1}{2}(R+tia)^2}| = a\sup_{t\in[0,1]} |e^{-\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}t^2a^2-Rtia}| = a\sup_{t\in[0,1]} e^{-\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}t^2a^2} = ae^{-\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}a^2} \to 0\end{aligned}$$

für $R\to\infty$. (Das andere Integral analog.)

c) Direkte Folgerung aus a) und b). [Falls ein Vorzeichen fehlt: Nicht vergessen, die Integralgrenzen zu tauschen bzw. γ_3 in der richtigen Richtung zu durchlaufen.] Die zweite Gleichheit ist aus der reellen Analysis bekannt.

d) Nach c) ist (Ausmultiplizieren des Exponenten und Multiplikation mit $e^{-\frac{1}{2}a^2}$

$$e^{-\frac{1}{2}a^2}\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2+iax}dx.$$

Mit dieser Vorbereitung erhalten wir, indem wir $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$ einsetzen und in einem der Integrale substituieren,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos(ax)dx =&\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2+iax}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2-iax}dx\\ =&\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2+iax}dx + \frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^{-\frac{1}{2}(-x)^2-ia(-x)}(-dx)\\ =&\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2+iax}dx\\ =&\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}a^2}\sqrt{2\pi}.\end{aligned}$$

Hausaufgabe 4: 4 Punkte

Finde eine beliebig oft reell differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ mit $f(0)=0$, aber $\int_{\partial B_1(0)}\frac{f(z)}{z}dz \neq 0$ (und weise diese Eigenschaft nach).

Lösung:

$$z \mapsto (\mathrm{Re}(z))^2.$$

Diese Funktion ist offensichtlich beliebig oft reell differenzierbar. Ferner ist $(\mathrm{Re}(0))^2 = 0$ und

$$\int_0^{2\pi}\frac{(\mathrm{Re}(e^{it}))^2}{e^{it}}ie^{it}\,\mathrm{d}t = i\int_0^{2\pi}(\cos(t))^2dt = i\pi \neq 0.$$

Hausaufgabe 5: 5 Punkte

Es sei $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die $\mathrm{Re}(f(z))>0$ für alle $z\in\partial B_1(0)$ erfüllt.
Zeige: f hat keine Nullstelle in 0.

Lösung:
Nach der Cauchy'schen Integralformel ist

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1(0)}\frac{f(z)}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})}{e^{it}}ie^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})dt,$$

und daher

$$\mathrm{Re}(f(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}(f(e^{it}))dt > 0,$$

also insbesondere $f(0)\neq 0$.